BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
Matematikai közgazdaságtan és gazdaságelemzés tanszék

HALADÓ MIKROÖKONÓMIA

A GAZDASÁGI SZEREPLŐK EGYÉNI DÖNTÉSEI

Egyetemi jegyzet

Csekő Imre

ISBN: 978-963-503-818-3

Budapest, 2019. augusztus

Tartalom

Előszó

Ez a jegyzet az elmúlt évtizedekben az egyetemi haladó mikroökonómia kurzusaimra készített óravázlatok egységes keretbe szerkesztett változata. Magán viseli az ilyen vázlatok minden vonását, nem igazán tekinthető teljes egésznek, tele van feladatokkal, és nincs benne egyetlen hivatkozás sem. Tartalmilag azonban egy – remélhetőleg – jól végig gondolt koncepció része, és emiatt a benne található témák összetartoznak.

Az évek során nagyratörő – és mint kiderült – csak félig megvalósított elképzelésen törtem a fejem: egy háromrészes könyvsorozat terveit dédelgettem magamban, amelyben az első kötet a sztenderd neoklasszikus mikroökonómia nyelvén tárgyalta volna az elkülönült gazdasági aktorok döntéseinek alapvonásait. A második kötet a szigorúan vett általános egyensúlyelmélet alapmodelljét, azaz az előzőekben említett döntések interakciójának eredményeit ismertette volna. A harmadik kötet eredetileg arra lett volna hivatott, hogy rámutasson a korábbi részek egyes feltevéseinek inkompatibilitására, és – megtartva az általános egyensúlyelmélet eredményeinek pozitív vonásait – feloldja a feltevései közül azokat, amelyek az említett elméleti gazdasági rendszer önellentmondásait okozzák.

Mit tesz a sors: a második és harmadik rész korábban elkészült, és meg is jelent.[1] Erre az első részre azonban már nem maradt energiám, csak e vázlatot adhatom közre, ezt is csak azért, mert a Budapesti CORVINUS Egyetemen több éves előkészítő munka és sorozatos küzdelem után elindulhatott az ötéves osztatlan képzésen a gazdaság- és pénzügy-matematikai elemzés mesterszak. E szak egyik kötelező tárgyának, *Az egyensúlyelmélet mikroökonómiája* című tárgynak, az anyagát tartalmazza ez a kötet.

A benne található ismereteket három könyvből – sokszor szinte változtatás nélkül – ollóztam össze. Ez a három könyv (szerző szerinti ábécé-sorrendben):

- Mas-Colell, A. - Whinston, M. D. - Green, J. R.: *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1995.

- Varian, H.: *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton & Co., New York, 1992.

[1] Csekő Imre: Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe. Budapest: BCE, 2016 . http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2668/1/BCE_MNB_Cseko-RovidBevezetes.pdf

Csekő Imre: Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly. Budapest: BCE, 2016 . http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2539/1/BCE_MNB_Cseko-Kozossegi.pdf

- Zalai E.: *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-Kerszöv, Budapest, 2000.

Igazán remélem, hogy a szak hallgatóinak hasznára válik ez a jegyzet. Ha mégsem, talán nem okoz nagy kárt, hiszen csak elektronikus formában jelenik meg.

Budapest, 2019. nyarán

Csekő Imre

1. fejezet

Az egyéni döntés

Amikor valaki döntést hoz, akkor általában tudatában van(?) annak, hogy döntése nem csak az adott időpontbeli adott állapotot befolyásolja. Ha ma megveszünk valamit, akkor az többnyire holnap is miénk lesz. Az a pénz viszont, amiért megvesszük, holnap már nem áll rendelkezésünkre. Emiatt a mai döntésünk akár az egész időhorizontbeli helyzetünket befolyásolhatja.

1.A. Az általános probléma

Jelölje a számunkra belátható idő végét a T időpont. (T lehet véges vagy végtelen). Az egyes időszakokat ezen belül a $t = 1, 2, \ldots T$ indexszel különböztetjük meg. Minden időszakban (akár a $t = 1$ időpontban) felléphet bizonytalanság arra vonatkozóan, hogy végül is milyen körülmények között élünk. Egy éppen érvényes körülményegyüttest a világállapot kifejezéssel illetjük, a világállapotok halmazát világállapot-halmaznak hívjuk. Jelöljuk a t-edik időpontban a világállapot-halmazt a Θ^t szimbólummal. Az adott t időpontban lehetséges világállapotok száma lehet véges, illetve végtelen, az egyes világállapotok jele pedig legyen a θ_v^t szimbólum, ahol $v = 1, 2, \ldots$, ha a világállapotok száma végtelen, és $v = 1, 2, \ldots, V(t)$, amenynyiben a világállapotok száma véges. Vegyük észre, hogy az egyes időszakokban a világállapotok száma (számossága) lehet eltérő. Minden időszakot jellemez egy valószínűségeloszlás: az egyes világállapotok bekövetkeztének valószínűséget adja. Minden időszakban és világállapotban a körülményegyüttest befolyásolhatja egy olyan, a döntéshozó számára exogén, általa nem befolyásolható paraméteregyüttes, amely az adott világállapot szerves része. Jelölje ezt minden esetben a q_v^t szimbólum, ahol az egyszerűség kedvéért $q_v^t \in \mathbb{R}^{S(t,v)}$.

Egy t időpont és egy hozzátartozó θ_v^t világállapot meghatároz két összetevőt: a döntéshozó által választható alternatívák halmazát, jelölje ezt $X\left(t, \theta_v^t\right)$, valamint egy választási, döntési eljárást, ennek jele legyen $\xi\left(t, \theta_v^t\right)$. Az alternatívák halmazát általában könnyebb megadni, ebben legtöbbször segít a q_v^t paraméteregyüttes, a döntési eljárás leírása, sokkal bonyolultabb, későbbre halasztjuk. A továbbiakban két fontosabb eljáráscsoporttal ismerkedünk majd meg.

Ezek után merül fel a legfontosabb és egyben legnehezebben megválaszolható kérdés: miként aggregáljuk az egyes időpont- és világállapotbeli döntéseket annak érdekében, hogy a döntéshozó most – a döntés pillanatában – képes legyen „racionális" döntést hozni. Ezt a kérdést a maga általánosságában szinte egyetlen egy közgazdasági modell sem teszi fel, és válaszolja meg. A makroökonómia egyes modelljeiben minden időpillanatban csak egy világállapot van, és minden időpontban azonos a döntési eljárás – a hasznossági függvény. A különböző időszaki döntésekhez tartozó valós számértékeket pedig „jelenértékre diszkontáljuk", és így egy egyszerű maximalizálási feladatot kapunk. A bizonytalanság melletti döntések alapmodelljében nincs idő, csak egy időszak van. A világállapotok bekövetkeztének valószínűsége alapján aggregálható a világállapotbeli döntések eredménye.

Az általános egyensúlyelmélet klasszikus (statikus és determinisztikus) alapmodelljében a helyzet még egyszerűbb: egy időszak és egy világállapot van. Miután ebben a jegyzetben – egy-két szakaszt leszámítva – ilyen egyszerű modellel dolgozunk érdemes ilyen keretben megismerkedni a döntéselméleti fogalmakkal.[2]

1.B. Egyidőszakos probléma bizonytalanság nélkül

Ebben a szakaszban jelöljük a választható alternatívák halmazát az X szimbólummal. Két döntési eljárást tárgyalunk: az egyikben a döntéshozó a preferenciái szerint dönt, a másik csoportot maga a (megfigyelt?) döntés jellemzi.

1.B.1. Preferenciarelációk

Ebben a pontban a döntési eljárás alapja az úgynevezett preferenciarendezés. Ha x és y az X alternatívahalmaz elemei, és a döntéshozó az x alternatívát nem tekinti rosszabbnak, mint az y lehetőséget, akkor ezt a tényt az

$$x \succsim y$$

jelöléssel jelezzük. Az $\succsim$ preferenciarendezés egy, az X halmazon értelmezett bináris reláció. Segítségével két másik reláció származtatható:
a szigorú preferencia - jele $\succ$ -:

$$[x \succ y\,] \Leftrightarrow [(x \succsim y)\,,\ \text{de}\ \neg\ (y \succsim x)]\,;$$

[2] A leírásban olyan kifejezéseket használunk, amelyeket a mikroökonómiával korábban már foglalkozó olvasó automatikusan a fogyasztó elméletéhez köt. E szóhasználat ne vezessen félre senkit, az ebben a fejezetben található fogalmak és összefüggések a termelő elméletére éppúgy használhatók, csak ott sokkal egyszerűbbé válnak az itt elmondottak. Ha végigküzdöttük magunkat az anyagon, érdemes ismét visszatérnünk ide, és ilyen alapon is végiggondolni a termelés elméletét.

a közömbösségi(indifferencia) reláció - jele $\sim$ -:

$$[x \sim y\,] \Leftrightarrow [x \succsim y \text{ és } y \succsim x]\,.$$

A $\succsim$ preferenciarelációt *teljes*nek mondjuk, ha $\forall x, y \in X - re$,

$$(x \succsim y) \vee (y \succsim x)\,.$$

A $\succsim$ preferenciarelációt *tranzitív*nak mondjuk, ha $\forall x, y, z \in X - re$,

$$[(x \succsim y) \wedge (y \succsim z)] \Rightarrow (x \succsim z)\,.$$

A $\succsim$ preferenciarelációt *racionális*nak mondjuk, ha teljes és tranzitív egyszerre.

□ □ □

1.B.1. Feladat. *Mutassuk meg: ha $\succsim$ racionális, akkor mind $\succ$, mind $\sim$ tranzitív, valamint az*

$$[(x \succ y) \wedge (y \sim z)] \Rightarrow (x \succ z)\,.$$

implikáció is fennáll.

□ □ □

1.B.2. Egy kis kitérő

A közgazdaságtanban a preferenciákat sokszor más módon, a *hasznossági függvény* segítségével írjuk le. Tesszük ezt azért, mert analitikus alakkal könnyebben dolgozunk, mint relációkkal, azaz részhalmazok családjával. A hasznossági függvény $\forall x \in X$ alternatívához egy valós számot rendel.

1.B.2. Definíció. *Az $u : X \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény reprezentálja a $\succsim$ preferenciarendezést, ha $\forall x, y \in X - re$*

$$u\,(x) \geqq u\,(y) \Leftrightarrow (x \succsim y)\,.$$

A definícióból nyilvánvaló, hogy egy preferenciarendezést reprezentáló hasznossági függvény nem egyedüli, ennek minden pozitív monoton transzformációja is reprezentálja ugyanazokat a preferenciákat.

1.B.3. Tétel. *A $\succsim$ preferenciarendezés csak akkor reprezentálható hasznossági függvénnyel, ha racionális.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $u : X \to \mathbb{R}$ függvény reprezentálja a preferenciákat. Nyilván, $\forall x, y \in X$-re vagy $u\,(x) \geqq u\,(y)$ vagy $u\,(x) \leqq u\,(y)$. A reprezentációból ekkor

$$(x \succsim y) \quad \text{vagy} \quad (y \succsim x)\,,$$

azaz a rendezés teljes.

Tegyük most fel, hogy tetszőleges $x, y, z \in X$ esetén $(x \succsim y)$ és $(y \succsim z)$. Mivel az u függvény reprezentálja a preferenciákat, ezért $u(x) \geqq u(y)$ és $u(y) \geqq u(z)$, amiből $u(x) \geqq u(z)$. Megintcsak kihasználva a reprezentáció tényét, ebből $(x \succsim z)$ következik, azaz a preferenciarendezés tranzitív. $\square$

Sokkal érdekesebb a fordított irányú kérdés: vajon, ha egy preferenciarendezés racionális, akkor reprezentálható-e. A válasz negatív: sajnos, nem feltétlenül. Erre a pontra később visszatérünk.

1.B.3. Döntési szabályok

Ebben a pontban a döntés maga az alapfogalom. A döntést az úgynevezett $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *döntési szerkezet*tel adjuk meg, ahol $\mathcal{B}$ az X halmaz nemüres B részhalmazainak egy halmaza, a $C : \mathcal{B} \rightrightarrows X$ pedig a döntési (választási) szabály, aminek értelmében $\forall B \in \mathcal{B}$-re $C(B) \subseteq B$.

1.B.4. Példa. *Legyen* $X = \{x, y, z\}$ *és* $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. *Két döntési szabályt is definiálunk:*

$$(\mathcal{B}, C_1(\cdot)) \quad : \quad C_1(\{x, y\}) = \{x\} \text{ és } C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}; \tag{1.B–1}$$

$$(\mathcal{B}, C_2(\cdot)) \quad : \quad C_2(\{x, y\}) = \{x\} \text{ és } C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\} \tag{1.B–2}$$

1.B.5. Definíció. *A* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *döntési szerkezet kielégíti* a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját *(WARP), ha igaz rá, hogy*

> ha $\exists B \in \mathcal{B}$, amire $x, y \in B$ esetén $x \in C(B)$, akkor bármely $B' \in \mathcal{B}$, amire $x, y \in B'$ és $y \in C(B')$, $x \in C(B')$ szintén.

1.B.6. Megjegyzés. *A (1.B–1) döntési szerkezet kielégíti a WARP-ot, a (1.B–2) nem.*

Ezek után definiáljunk egy preferenciarelációt, az úgynevezett *kinyilvánított preferenciarelációt.*

1.B.7. Definíció. *Az adott* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *döntési szerkezethez tartozó* $\succsim^*$ *reláció* kinyilvánított preferenciareláció, *ha*

$$[x \succsim^* y] \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}, \text{ amire } x, y \in B \text{ és } x \in C(B).$$

Ezt úgy mondjuk, hogy a döntéshozó az x alternatívát legalább olyan jónak nyilvánította, mint az y lehetőséget. Ha $\exists B' \in \mathcal{B}$, amire $x, y \in B'$ és $x \in C(B')$, valamint $y \notin C(B')$, akkor a döntéshozó az y-nál jobbnak nyilvánította az x alternatívát. A gyenge axióma ezek után szavakba átfogalmazva: ha a döntéshozó x-et legalább olyan jónak nyilvánítja, mint y-t, akkor nem nyilváníthatja ugyanakkor y-t jobbnak.

□ □ □

1.B.8. Feladat. *Mutassunk példát arra, hogy a $\succsim^*$ kinyilvánított preferenciareláció nem feltételenül teljes és nem feltétlenül tranzitív.*

□ □ □

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat a preferenciarendezés racionalitása és a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája között.

Legyen Xés $\succsim$ adott. Ekkor egy $B \subseteq X$esetén a döntéshozó azok közül a lehetséges alternatívák közül választ, amelyek "legjobbak a számára" a következő halmazból:

$$C^*(B, \succsim) = \{x \in B \,|x \succsim y, \ \forall y \in B - re.\},$$

amiről feltesszük, hogy az általunk vizsgált esetekben *nem üres.*

1.B.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\succsim$ preferenciarendezés racionális. Ekkor az általa generált*

$$(\mathcal{B}, C^*(\cdot, \succsim))$$

döntési szerkezet kielégíti a gyenge axiómát.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{B}$, $x, y \in B$ és $x \in C^*(B, \succsim)$. Ebből $x \succsim y$. Tegyük most azt fel, hogy egy $B' \in \mathcal{B}$, amire $x, y \in B'$ esetén $y \in C^*(B', \succsim)$. Ebből $y \succsim z$, $\forall z \in B'$. A tranzitivitás miatt azonban

$$x \succsim y \succsim z, \ \forall z \in B' - re,$$

azaz

$$x \in C^*(B', \succsim).$$

□

1.B.10. Definíció. *Az adott $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ döntési szerkezet esetén a racionális $\succsim$ preferenciarendezés racionalizálja a $\mathcal{B}$-re vonatkozó $C(\cdot)$ döntési szabályt, ha $\forall B \in \mathcal{B}$-re*

$$C(B) = C^*(B, \succsim).$$

1.B.11. Következmény. *Csak olyan döntési szerkezethez tartozó döntési szabály racionalizálható, amelyik kielégíti a gyenge axiómát.*

Bizonyítás: A 1.B.9. Tétel és a 1.B.10. Definíció közvetlen folyománya. □

Azonnal felmerül a kérdés, hogy ez a szükséges feltétel vajon elegendő-e is egyben. A válasz sajnos nemleges, amint azt a következő feladat is alátámasztja.

1.B.12. Példa. *Legyen* $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$, *és* $C(\{x, z\}) = \{z\}$. *Ez a döntési szerkezet kielégíti a gyenge axiómát, de nem racionalizálható, hiszen a racionális preferenciarendezésben egyidőben kellene fennállnia az* $x \succ y$, $y \succ z$ *és a* $z \succ x$ *relációknak, ami lehetetlenség.*

□ □ □

1.B.13. Feladat. *Legyen a döntési szerkezet ugyanaz, mint a 1.B.12. Példában, azzal a különbséggel, hogy* $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$ *szintén. Mutassuk meg, hogy ez a döntési szerkezet megsérti a gyenge axiómát!*

□ □ □

Végül adunk egy olyan pótlólagos feltételt, ami a gyenge axiómával karöltve biztosítja a racionalizálhatóságot. Tisztában kell lennünk azonban azzal a sajnálatos ténnyel, hogy a legtöbb, általunk a későbbiekben vizsgált problémában ez a feltétel nem teljesül.

1.B.14. Tétel. *A* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *döntési szerkezet elégítse ki a gyenge axiómát és* $\mathcal{B}$ *tartalmazza* X *minden, legfeljebb három elemű részhalmazát. Ekkor létezik olyan racionális* $\succsim$ *preferenciarendezés, ami racionalizálja a* $\mathcal{B}$*-re vonatkozó* $C(\cdot)$ *döntési szabályt, és ez a rendezés egyértelmű.*

Bizonyítás: A kijelölt célra első, természetes jelöltünk a kinyilvánított preferenciareláció. Először belátjuk, hogy racionális, aztán azt, hogy racionalizálja a döntési szabályt, majd az egyértelműséget látjuk be.

A teljesség bizonyítása egyszerű, hiszen a pótlólagos feltételünk miatt minden kételemű halmaz eleme $\mathcal{B}$-nek, így vagy $x \succsim^* y$, vagy $y \succsim^* x$, vagy mindkettő. Rátérve a tranzitivitásra, tegyük fel, hogy $x \succsim^* y$ és $y \succsim^* z$. Tekintsük most az $\{x, y, z\}$ halmazt. Elegendő belátnunk, hogy $x \in C(\{x, y, z\})$, mert ebből $\succsim^*$definíciója miatt $x \succsim^* z$ már következik. Mivel C képe nem lehet üres, legalább az egyik alternatíva benne van. Legyen ez mondjuk y. Ekkor az $x \succsim^* y$ feltevés miatt kapjuk a várt tartalmazást. Ha $z \in C(\{x, y, z\})$, akkor $y \succsim^* z$ miatt $y \in C(\{x, y, z\})$, és megint helyben vagyunk.

Tegyük most fel, hogy $x \in C(B)$, ahol B a $\mathcal{B}$ halmaz tetszőleges eleme. Ekkor $x \succsim^* y$, $\forall y \in B$, azaz $x \in C^*(B, \succsim^*)$. Ebből $C(B) \subseteq C^*(B, \succsim^*)$. Ezután vizsgáljuk meg az $x \in C^*(B, \succsim^*)$ esetet! A definícióból kapjuk, hogy $x \succsim^* y$, $\forall y \in B$, és emiatt a gyenge axióma és $\mathcal{B}$ struktúrája miatt minden y-hoz léteznie kell egy olyan $B_y \in \mathcal{B}$ halmaznak, amire $x, y \in B_y$ és $x \in C(B_y)$. Sőt, a gyenge axióma ezután azt is implikálja, hogy $x \in C(B)$, azaz $C^*(B, \succsim^*) \subseteq C(B)$.

Az egyértelműség már egyszerűen következik abból, hogy $\mathcal{B}$-nek az összes két elemű halmaz is eleme, mert ez már bármely párra adja a preferenciarelációt. □

I. rész

A termelő elmélete

2. fejezet

A termelő és a termelés ábrázolása

A termelő speciális kapcsolatot tart a külvilággal, egyelőre csak a jószágokon keresztül. Fekete dobozként ábrázoljuk, ahol a kapcsolatok egy része inputoldali, másik része outputoldali. Belső szervezetétől, struktúrájától viszonyaitól, valamint külső céljától egyelőre eltekintünk.

A termelés ebben a felfogásban tiszta jószágtranszformáció, minden más gazdasági tevékenység definíciószerűen nem termelés.

2.A. A technológia

A modell alapfogalmai a termelő és a jószágok. A termelőket, akik egyértelműen beazonosíthatók és kizárólag termelési tevékenységeket folytatnak a j szimbólummal indexeljük, és feltesszük, hogy véges sokan vannak. Ezek szerint

$$j = 1, 2, \dots, J < \infty.$$

Egyelőre csak egy termelőt vizsgálunk, azaz $J = 1$ lesz mindaddig, amíg rá nem térünk az interakciók vizsgálatára is.

A jószágokról feltesszük, hogy listájuk véges és az egyes listaelemekhez tartozó jószágok homogének, azaz egységeik nem különböztethetők meg egymástól. A különböző modellekben kétféle módon ábrázoljuk a termelést: bruttó, illetve nettó szemléletben.

2.A.1. A bruttó ábrázolásmód

Ebben az ábrázolásmódban két utat járhatunk: az egyes jószágfajtákról (jószáglistaelemekről) kiköthetjük, hogy inputként (erőforrásként, ráfordításként, esetleg tényezőként), vagy outputként (termékként, kibocsátásként) tekintendők-e. Először azt a modellt vizsgáljuk meg, amiben ezt a listaelemekre vonatkozó funkcionális elkülönítést megtesszük.

Bruttó ábrázolásmód, jószágfunkciók determináltak

Azok a jószágok, amelyeket a termelő inputként hasznosít, ebben a modellben nem lehetnek outputok. Listájuk $N_i < \infty$ elemet tartalmaz, indexük ni, azaz $ni = 1, 2, \ldots, N_i$. E jószágoknak természetes mértékegységük van, és feltételezzük róluk, hogy folytonosan *oszthatóak*.

Azok a jószágok, amelyeket a termelő outputként hasznosít, következésképpen ebben a modellben nem lehetnek inputok. Listájuk $N_o < \infty$ elemet tartalmaz, indexük no, azaz $no = 1, 2, \ldots, N_o$. E jószágoknak is természetes mértékegységük van, és feltételezzük róluk, hogy *folytonosan oszthatóak*.

Egy megvalósítható termelési tevékenységet egy

$$(y, z) \in \mathbb{R}_+^{N_o} \times \mathbb{R}_+^{N_i}$$

vektorpárral reprezentálunk, ahol az y vektor egy $no - adik$ eleme, azt mutatja meg, hogy ebben a termelési tevékenységben, ebből a jószágból mennyit termelünk, a z vektor $ni - edik$ eleme pedig azt, hogy mennyit használunk fel. Ebben az értelmezésben természetes, hogy ezek a vektorok nemnegatívak.

2.A.1. Definíció. *Az összes technikailag, műszakilag megvalósítható termelési tevékenységek halmazát a termelő technológiájának hívjuk és ebben a modellben az $Y_{br,d}$ szimbólummal jelöljük. Nyilván*

$$Y_{br,d} \subseteq \mathbb{R}_+^{N_o} \times \mathbb{R}_+^{N_i}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy $Y_{br,d}$ összefüggő halmaz.

2.A.2. Definíció. *Az Y technológiában a termelhető output halmaznak nevezzük, és az $Y^+ \subseteq \mathbb{R}_+^{N_o}$ szimbólummal jelöljük mindazon $y \in \mathbb{R}_+^{N_o}$ outputvektorok halmazát, amelyek valamely $z \in \mathbb{R}_+^{N_i}$ inputvektorral párban elemei a technológiának, azaz*

$$Y^+ \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}_+^{N_o} \middle| \exists z \in \mathbb{R}_+^{N_i},\ (y, z) \in Y \right\}$$

2.A.3. Definíció. *Egy $y \in Y^+$ outputvektorhoz a $Z(y) \subseteq \mathbb{R}_+^{N_i}$ inputigényhalmaz tartozik, ahol*

$$Z(y) \triangleq \left\{ z \in \mathbb{R}_+^{N_i} \,|(y, z) \in Y \right\}.$$

2.A.4. Definíció. *Legyen (y, z) és (y', z') két $Y_{br,d}$ halmazbeli termelési tevékenység. Az (y, z) tevékenység* hatékonyabb, *mint (y', z'), ha*

$$\begin{aligned} y \geqq (\neq)\, y' \qquad & \text{és } z \leqq z', \text{ vagy} \\ y \geqq y' \qquad & \text{és } z \leqq (\neq)\, z'. \end{aligned}$$

Egy $(y, z) \in Y_{br,d}$ tevékenység hatékony, *ha nincs nála hatékonyabb a technológiában. A hatékony tevékenységek halmazát az $Y^o_{br,d}$ szimbólummal jelöljük.*

2.A.5. Példa. *Legyen $N_o = 1$ és tegyük fel, hogy a technológiában léteznek hatékony tevékenységek, valamint azt is, hogy ezek $Y^o_{br,d}$ halmaza megadható az*

$$y = f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right)$$

analitikus alakban. Ekkor az f függvényt termelési függvény*nek nevezzük. Vegyük észre, hogy értelmezésünkben a termelési függvény kizárólag hatékony tevékenységeket ír le.*

Bruttó ábrázolásmód, jószágfunkciók nem determináltak

Ez a modell lépés a nettó ábrázolásmód felé. Itt azzal a feltételezéssel élünk, hogy minden jószág lehet output és input is, de továbbra is "látjuk" azt, hogy egy termelési tevékenységben miként használjuk őket.

Legyen a jószáglistánk most az eddigi inputlista és outputlista úniója. Ezek szerint a jószágokat a n szimbólummal indexeljük és

$$n = 1, \ldots, N,$$

ahol nyilván

$$N \leqq N_o + N_i.$$

A termelési tevékenység egy $(y, z) \in \mathbb{R}^N_+ \times \mathbb{R}^N_+$ vektorpár, a technológia az Y_{br} halmaz és az értelemszerűen definiált hatékony tevékenységek halmaza a Y^o_{br} halmaz.

2.A.2. A nettó ábrázolásmód

A nettó ábrázolásmód alapgondolata az, hogy minden jószág lehet akár tevékenységen belül is input és output egyszerre. Ekkor értelmes dolog a termelési tevékenységre úgy tekinteni, hogy eredménye a nettó kibocsátás, a netput, azaz az output és az input különbsége.

Az előző modellből indulunk. Véges sok, az n szimbólummal indexszelt jószágunk van, egy (nettó) termelési tevékenység az $\mathbb{R}^N$ tér egy pontja, jele legyen y. Nyilván y előjele most nem predeterminált. Ha

$$\begin{aligned} y_n &< 0, \text{ akkor } y_n \text{ végső soron input, ha} \\ y_n &> 0, \text{ akkor } y_n \text{ végső soron output, és ha} \\ y_n &= 0, \text{ akkor } y_n \text{ vagy közbeeső termék vagy nem szerepel a tevékenységben.} \end{aligned}$$

2.A.6. Definíció. *Az összes technikailag, műszakilag megvalósítható termelési tevékenységek halmazát most is a termelő technológiájának hívjuk és ebben a modellben az Y szimbólummal jelöljük. Nyilván $Y \subseteq \mathbb{R}^N$. A továbbiakban feltesszük, hogy Y összefüggő halmaz.*

2.A.7. Definíció. *Legyen y és y' két, Y halmazbeli termelési tevékenység. Az y tevékenység* hatékonyabb, *mint y, ha*

$$y \geqq (\neq)\, y.$$

Egy $y \in Y$ tevékenység hatékony, *ha nincs nála hatékonyabb a technológiában. A hatékony tevékenységek halmazát az Y^o szimbólummal jelöljük.*

2.A.8. Segédtétel. *Ha $y \in Y^o$, akkor $y \notin int\ Y$.*

Bizonyítás: Triviális a definíciókból. □

Szokás néha a technológiát az úgynevezett $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *általános transzformációs függvény* segítségével megadni.

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \,|F\,(y) \leqq 0 \right\},$$

ahol az $F\,(y) = 0$ egyenlőséget kielégítő pontok a technológia határát adják. Az ilyen technológiában szereplő hatékony tevékenységeket külön elnevezéssel is illetjük. Mint azt a 2.A.8. Segédtételből tudjuk, hatékony tevékenység csak a technológia határán lehet. A technológia határának azokat a pontjait, amelyek egyben hatékonyak, *transzformációs felület*nek, vagy *általánosított termelési függvény*nek hívjuk.

Különös jelentőséggel bírnak azok a modellek, amelyekben Y^o megadható az $F\,(y) = 0$ analitikus alakban. Az ennek a feltételnek megfelelő, folytonosan differenciálható általánosított termelési függvények használata meglehetősen elterjedt elemzési eszköz. A transzformációs felület adott pontbeli érintője ugyanis komoly közgazdasági tartalmat hordoz.

□ □ □

2.A.9. Feladat. *Tegyük fel, hogy*

$$Y^o = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \,|F\,(y) = 0 \right\}$$

és hogy a transzformációs felület folytonosan differenciálható. Mit tudunk mondani a parciális deriváltak előjeléről?

□ □ □

2.A.10. Definíció. *Jelöljük Δy_n szimbólummal az n-edik jószág mennyiségének megváltozását! Legyenek $1 \leqq l, k \leqq N$ egész számok, és tegyük fel, hogy*

$$\Delta y_n = 0, \quad \forall n \neq l, k.$$

A

$$\frac{dy_k}{dy_l} \triangleq \lim_{\Delta y_l \to 0} \frac{\Delta y_k}{\Delta y_l}$$

határértéket (határarányt), ha létezik, a k-adik és l-edik jószág közti transzformációs rátának nevezzük.

Ha a differenciálható transzformációs felület a hatékony tevékenységeket írja le, akkor a parciális deriváltak hányadosa három típusú határarányt ad. Ha ugyanis feltesszük, hogy

$$\Delta y_n = 0, \quad \forall n \neq l, k.$$

akkor az $F(y') = 0$ összefüggésből differenciálás után a

$$\frac{\partial F(y')}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial F(y')}{\partial y_l} dy_l = 0$$

egyenlőséget kapjuk. Ebből átrendezés után a

$$-\frac{dy_k}{dy_l} = \frac{\partial F(y') / \partial y_l}{\partial F(y') / \partial y_k}$$

összefüggést nyerjük. A dy_k/dy_l transzformációs ráta előjele biztos negatív, ami azt jelenti, hogy hatékony tevékenységek esetén a szóban forgó két jószág közötti kapcsolat "trade-off" jellegű: ahhoz, hogy az egyik jószágból többre tegyünk szert (kevesebbtől váljunk meg) a másik jószágból többet kell feláldoznunk. Ennek az áldozatnak az adott pontbeli eredményét, a *(határ)hozadék*át jellemzi a transzformációs ráta.[1] Mindezeket szem előtt tartva, a transzformációs ráták helyett, általában azok abszolút értékét használjuk. Ha a

$$\left| \frac{dy_k}{dy_l} \right| \triangleq \frac{\partial F(y') / \partial y_l}{\partial F(y') / \partial y_k}$$

függvény az y_l változóban növekszik (csökken, állandó), akkor azt mondjuk, hogy a l-edik jószágnak az k-adik jószágra vonatkozó *(határ)hozadéka* növekszik (csökken, állandó).

□ □ □

2.A.11. Feladat. *Mit tudunk mondani az átlaghozadék monotonitási szakaszairól a határhozadék segítségével?*

□ □ □

Attól függően, hogy a jószágok milyen funkciót töltenek be, e transzformációs rátáknak külön elnevezése van. Ha $y_l' > 0$ és $y_k' > 0$, akkor

$$\frac{\partial F(y') / \partial y_l}{\partial F(y') / \partial y_k} = MRT_{l,k}(y') \text{ a transzformációs határarány,}$$

ha $y_l' < 0$ és $y_k' < 0$, akkor

$$\frac{\partial F(y') / \partial y_l}{\partial F(y') / \partial y_k} = MRTS_{l,k}(y') \text{ a technikai helyettesítési határarány,}$$

[1] Az adott pontbeli *átlaghozadékot* pedig az y_k/y_l érték. Ez nem más mint a két jószág által kifeszített (y_l, y_k) kétdimenziós térben az origó és az adott pont közé húzott szakasz meredeksége.

végül ha $y'_l < 0$ és $y'_k > 0$, akkor

$$\frac{\partial F\left(y'\right)/\partial y_l}{\partial F\left(y'\right)/\partial y_k} = MP_l^k\left(y'\right) \text{ a határtermék.}$$

Vegyük észre, hogy amennyiben adott egy olyan bruttó ábrázolásmódban megadott technológiánk, ahol jól definiálható a termelési függvény, akkor ebből roppant egyszerűen nyerhető az ugyanazokat a termelési lehetőségeket tartalmazó nettó technológia és a transzformációs felület. Ekkor ugyanis $N = 1+N_i$ és $\forall z \in \mathbb{R}_+^{N_i}-re$

$$Y = \left\{ \left(y, -z_1, -z_2, \ldots, -z_{N_i}\right) \in \mathbb{R}^N \left| y \leqq f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right) \right. \right\},$$

valamint

$$F\left(y, -z_1, -z_2, \ldots, -z_{N_i}\right) = y - f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right) = 0.$$

Ebben az esetben a l-edik ($l = 1, 2, \ldots, N_{i,}$) inputjószág határterméke

$$MP_l\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right) = \frac{\partial f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right)}{\partial z_l},$$

az $l, k = 1, 2, \ldots, N_i,\ l \neq k$ inputjavakra vonatkozó technikai helyettesítési határarány

$$MRTS_{l,k}\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right) = \frac{MP_l\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right)}{MP_k\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right)} = \frac{\partial f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right)/\partial z_l}{\partial f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i}\right)/\partial z_k}$$

alakban adható meg.

Ez utóbbi geometriai interpretációja régebbről ismert. Ha a z_l és z_k kivételével a többi változó értékét rögzítjük, akkor a termelés e rögzített értékek melletti *isoquant*ját kapjuk a (z_k, z_l) térben. A technikai helyettesítés határaránya ebben az esetben az isoquant adott pontbeli érintőjének meredekségét – pontosabban annak abszolút értékét – adja.

2.B. A technológia néhány tulajdonsága

Ebben a pontban több olyan feltételt fogalmazunk meg a nettó ábrázolásmódban megadott technológiára, amiket a különböző modellek alkalmazni szoktak. (Érdemes ezeket – amennyiben lehetséges – átfogalmazni a bruttó ábrázolásmódban megadott technológiára is.) Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy ezek a feltételek nem szerepelhetnek mind egy modellben, vannak közöttük egymást kizáró feltevések, és vannak redundáns feltételpárok is. E helyütt csupán a felsorolást adjuk meg, példákat, illetve az esetleges ellenvetéseket mindenki maga keressen és adjon hozzá ehhez a listához.

- Y nem üres, zárt halmaz (regularitás);
- Y korlátos;

- $0 \in Y$, azaz a tétlenség lehetséges;
- Y additív, azaz $[y, y' \in Y] \Rightarrow [(y + y') \in Y]$;
- Y proporcionális, másképpen Y kúp, azaz, $[y \in Y,$ és $\lambda \geqq 0] \Rightarrow [\lambda y \in Y]$;
- Y konvex, azaz $[y, y' \in Y,\ \textit{és}\ \lambda \in (0,1)] \Rightarrow [\lambda y + (1-\lambda)\, y' = y'' \in Y]$;
- Y szigorúan konvex, azaz konvex és a határán nincsenek lineáris szakaszok;
- Y-ban a mérethozadék nemnövekvő, azaz $[y \in Y$ és $\lambda \in [0,1]] \Rightarrow \lambda y \in Y$;
- Y-ban a mérethozadék nemcsökkenő, azaz $[y \in Y$ és $\lambda \geqq 1] \Rightarrow \lambda y \in Y$;
- Y-ban a mérethozadék állandó, azaz

  $$[y \in Y \text{ és } \lambda \geqq 0] \Rightarrow \lambda y \in Y$$

  (vessük ezt össze a proporcionalitással!);
- Nincsen rózsa tövis nélkül, vagyis nincs ingyen ebéd, azaz

  $$[y \in Y] \Rightarrow y \notin \mathbb{R}_+^N \backslash 0;$$

- A termelés irreverzibilis, vagyis kolbászból nem lesz disznó, azaz

  $$[y \in Y] \Rightarrow [-y \notin Y];$$

- A hatékonyság rontható, azaz $[y \in Y] \Rightarrow [\exists y' \in Y,$ amire $y' \leqq (\neq)\, y]$;
- Díjmentes lomtalanítás, azaz $[y \in Y$ és $y' \leqq (\neq)\, y] \Rightarrow [y' \in Y]$;
- Y producibilis, azaz $\forall n$-re, vagyis $n = 1, \ldots, N$ esetén $\exists y \in Y$, amire $y_n > 0$;
- Y produktív, azaz $\exists y \in Y$, amire $y > 0$.

□ □ □

2.B.1. Feladat. *Tekintsünk egy olyan bruttó ábrázolásmódban megadott technológiát, és legyen $N_o = 1$.Tegyük fel, hogy a technológiában léteznek hatékony tevékenységek, valamint azt is, hogy ezek $Y^o_{br,d}$ halmaza megadható az*

$$y = f(z_1, z_2, \ldots, z_{N_i})$$

termelési függvénnyel.? Legyen $Y^+ = \mathbb{R}_{++}$,és tételezzük fel, hogy a technológiára igaz a díjmentes lomtalanítás feltétele. Adjuk meg a $Z(y)$ inputigényhalmazokat!

□ □ □

3. fejezet

Néhány technológiatípus és ezek tulajdonságai

3.A. *CES*-technológiák

Tekintsük a következő bruttó ábrázolásmódban megadott technológiát, ahol a jószágfunkciók determináltak!

Legyen $N_o = 1$, és $N_i = 2$, így tudjuk, hogy $Y \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2$.[2] Legyen továbbá $\gamma, k > 0$ és $\delta \in (0,1)$, valamint $\beta \geqq -1$ $(\beta \neq 0)$. Ekkor definiáljuk a következő módon:

$$Y \triangleq \left\{ (y, z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \middle| y \leqq \gamma \left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta} \right)^{-\frac{k}{\beta}} \right\}.$$

Az ilyen technológiákat *CES-technológiák*nak hívjuk, a név magyarázatát később adjuk meg. A hatékony tevékenységek halmaza könnyen megadható és ebből szintén nagyon egyszerűen nyerhető a *CES-típusú termelési függvény.* Ugyancsak nem jelenthet problémát a nettó szemléletmódban megadott technológia és a transzformációs felület definiálása.

□ □ □

3.A.1. Feladat. *Vizsgáljuk meg, milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a technológia a paraméterek függvényében!*

□ □ □

[2] Természetesen a továbbiakat könnyen általánosíthatjuk a $2 < N_i < \infty$ esetre is.

Könnyen kiszámítható, hogy az $MP_1(z_1, z_2)$ és $MP_2(z_1, z_2)$ határtermékek a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} &= k \cdot \gamma \cdot \left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}-1} \cdot \delta \cdot z_1^{-(\beta+1)} = \\
&= k \cdot \gamma^{-\frac{\beta}{k}} \cdot \delta \cdot y^{\frac{\beta}{k}+1} z_1^{-(\beta+1)}, \\
\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} &= k \cdot \gamma \cdot \left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}-1} \cdot (1-\delta) z_2^{-(\beta+1)} = \\
&= k \cdot \gamma^{-\frac{\beta}{k}} \cdot (1-\delta) \cdot y^{\frac{\beta}{k}+1} z_2^{-(\beta+1)}
\end{aligned}$$

képletekkel, a helyettesítési határarány az

$$MRTS_{1,2}(z_1, z_2) = \frac{\delta}{(1-\delta)} \cdot \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{(\beta+1)} \tag{3.A–1}$$

összefüggéssel adható meg.

3.A.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ez utóbbi nem függ a k paraméter értékétől. Ugyancsak nem függ az inputok abszolút nagyságától, hanem csak azok arányától. Az ilyen tulajdonságoknak eleget tevő termelési függvényeket* homotetikus*nak nevezzük.*

3.B. Hozadékok és rugalmasságok

Mint tudjuk, a határtermék egy outputjószág és egy inputjószág kapcsolatáról ad képet. Úgy is fogalmaztunk, hogy a határtermék egy (határ)hozadéki viszonyt jellemez. Ennek a (határ)hozadéknak a monotonitási szakaszai, azaz a növekvő, állandó vagy csökkenő hozadék tartományai a határtermékek megfelelő parciális deriváltjaiból könnyen(?) kiszámolhatók.

□ □ □

3.B.1. Feladat. *Tegyük is ezt meg!*

□ □ □

3.B.1. A parciális termelési rugalmasság

E hozadéki viszonyt azonban befolyásolja a szóbanforgó jószágok mértékegysége. E torzítás kiküszöbölése érdekében használjuk a *parciális termelési rugalmasság* fogalmát, ami – mint minden rugalmassági mérőszám – egy határ- és a neki megfelelő átlagkapcsolat hányadosa, esetünkben a határtermék és az átlagtermék aránya az inputjószág adott szintje mellett.Azt mutatja meg, hogy az inputjószág szintjének százalékos változása hány százalékos változást eredményez az outputjószág szintjében, ha a többi jószág szintje változatlan.[3]

3.B.2. Definíció. *Egy $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ termelési függvényhez tartozó parciális termelési rugalmasságok az $\varepsilon_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2$ függvények, ahol*

$$\varepsilon_n (z_1, z_2) = \frac{\partial f (z_1, z_2)}{\partial z_n} : \frac{f (z_1, z_2)}{z_n}.$$

A parciális termelési rugalmasság használata pótlólagos előnyökkel jár: könnyen következtethetünk belőle az átlagtermék alakulására. Ha ugyanis egy jószág parciális termelékenységi rugalmassága az egységnyi értéket meghaladja, akkor abban a pontban az átlaghozadék növekvő, ha annál kisebb, akkor csökkenő, ha éppen egységnyi, akkor állandó.

□ □ □

3.B.3. Feladat. *Lássuk be ezt az állítást!*

□ □ □

Könnyen kiszámítható, hogy CES-típusú technológia esetén a parciális termelési rugalmasságok az alábbi képletekkel írhatók le:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 (z_1, z_2) &= k \cdot \frac{\delta \cdot z_1^{-\beta}}{\left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}\right)}, \\ \varepsilon_2 (z_1, z_2) &= k \cdot \frac{(1-\delta) \cdot z_2^{-\beta}}{\left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}\right)}, \end{aligned}$$

amiből jól látható, hogy $k > 1$ esetén a parciális átlaghozadéknak van csökkenő, állandó és növekvő hozadéki tartománya is. Ha $k < 1$, akkor a parciális átlaghozadék mindig csökkenő.

3.B.2. A (lokális) méretrugalmasság

Érdemes azt is megvizsgálnunk, hogy miként változik az összes inputjószág együttes hozadéka, ha mindegyiket ugyanolyan arányban változtatjuk. Ehhez először definiáljuk a $z^0 \in \mathbb{R}_+^2$ ponthoz tartozó $\varphi_{z^0} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ méretfüggvényt a

$$\varphi_{z^0}(v) \triangleq f\left(v \cdot z^0\right)$$

szabállyal, majd definiáljuk a *(lokális) mérethozadék*, illetve *méretrugalmasság* fogalmát.

[3] Ahogy azt korábban jeleztük, az itt csak két inputjószágra alkalmazott fogalmakat minden nehézség nélkül általánosíthatjuk tetszőleges véges számú erőforrásra.

3.B.4. Definíció. *Egy $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ termelési függvény adott $z^0 \in \mathbb{R}^2_+$ értelmezési tartománybeli pontjához tartozó (lokális) mérethozadék a $\varphi_{z^0}(v) \triangleq f\left(v \cdot z^0\right)$ méretfüggvény $v = 1$ pontbeli deriváltja (ha létezik):*

$$\left.\frac{d\left(\varphi_{z^0}(v)\right)}{dv}\right|_{v=1} \triangleq \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial f\left(v \cdot z^0\right)}{\partial z_n} \cdot \left.\frac{d\left(vz_n\right)}{dv}\right|_{v=1} = \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial f\left(z^0\right)}{\partial z_n} \cdot z_n,$$

míg az adott $z^0 \in \mathbb{R}^2_+$ értelmezési tartománybeli pontjához tartozó (lokális) méretrugalmassága a $\varphi_{z^0}(v) \triangleq f\left(v \cdot z^0\right)$ méretfüggvény $v = 1$ pontbeli rugalmassága (ha létezik):

$$\varepsilon_{z^0}\left(v\right) \triangleq \left.\frac{d\left(\varphi_{z^0}(v)\right)}{dv} : \frac{\varphi_{z^0}(v)}{v}\right|_{v=1} = \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial f\left(z^0\right)}{\partial z_n} \cdot \frac{z_n}{f\left(z^0\right)}.$$

A definícióból is jól látható, hogy egy adott pontbeli méretrugalmasság az adott pontbeli parciális termelési rugalmasságok összege. A CES-típusú termelési függvények méretrugalmassága ezek szerint a k paraméter értékével egyenlő.

3.C. Néhány konkrét technológiatípus

A továbbiakban a CES-típusú termelési függvények paramétereitől függő speciális technológiát vizsgálunk.

A lineáris technológia

Legyen $k = 1$, valamint $\beta = -1$. Ekkor a CES-típusú termelési függvény a következő formát ölti:

$$y = \gamma\left(\delta z_1 + \left(1 - \delta\right) z_2\right) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2,$$

azaz a termelési függvény, és így a technológia *lineáris.*

A határtermékek állandóak, így a helyettesítési határarány is az. Az isoquantok párhuzamos $-\delta / \left(1 - \delta\right)$ meredekségű egyenesek. A helyettesítés tökéletes.

A Leontief-technológia

Legyen most $k = 1$, valamint $\beta \to \infty$. Tegyük először fel, hogy $z_1 < z_2$. Ekkor

$$\lim_{\beta\to\infty} \gamma\left(\delta z_1^{-\beta} + \left(1 - \delta\right) z_2^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} = \lim_{\beta\to\infty} \gamma \cdot z_1 \cdot \left[\delta + \left(1 - \delta\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}} = \gamma \cdot z_1.$$

Hasonlóképpen, ha $z_1 > z$, akkor

$$\lim_{\beta\to\infty} \gamma\left(\delta z_1^{-\beta} + \left(1 - \delta\right) z_2^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} = \gamma \cdot z_2.$$

tehát ahogy $\beta \to \infty$, úgy

$$y = \gamma \cdot \min\{z_1, z_2\}.$$

A megfelelő inputjószág határterméke vagy egységnyi, vagy zérus, attól függően, hogy melyikből van több. Hasonlóképpen a helyettesítési határarány vagy nullához, vagy végtelenhez tart. Helyettesítés tehát nincs, az isoquantok derékszögűek, a $z_1 = z_2$ skálaegyenes mentén betörnek. Az inputjavak egymás tökéletes kiegészítői.

3.C.1. Megjegyzés. *Ezt a formulát kicsit általánosíthatjuk. Ha az inputjavakat a termelésben minden egységnyi termeléshez rögzített – de nem egy az egyhez – arányban kell felhasználnunk, akkor a termelési függvényt egy módosított CES-forma határértékeként kapjuk. Legyen*

$$y = \left(\delta\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^{-\beta} + (1-\delta)\left(\frac{z_2}{\rho_2}\right)^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}},$$

ahol ρ_1 és ρ_2 az egyes inputjószágok úgynevezett fajlagos ráfordítási együtthatója. Ekkor ugyanis ahogy $\beta \to \infty$, úgy

$$y = \min\left\{\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right), \left(\frac{z_2}{\rho_2}\right)\right\}.$$

Itt az isoquantok a

$$z_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} z_1$$

skálaegyenes mentén törnek be.

A Cobb-Douglas technológia

A $\beta = 0$ esetben a CES-függvény nincs értelmezve.[4] Megmutatható azonban, hogy a határértékben előálló függvénynek nagyon kellemes tulajdonságai vannak.

Ennek érdekében vegyük először a termelési függvény természetes alapú logaritmusát:

$$\ln y = \ln\gamma - \frac{k}{\beta} \cdot \ln\left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}\right).$$

A nullával való osztás miatt ez továbbra sincs értelmezve, de vegyük ennek határértékét, ha $\beta \to 0$, és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt!.

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0} \ln y &= \ln\gamma - k \cdot \lim_{\beta\to 0} \frac{\ln\left(\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}\right)}{\beta} = \\
&= \ln\gamma - k \cdot \lim_{\beta\to 0} \frac{-\left(\delta z_1^{-\beta} \cdot \ln z_1 + (1-\delta) z_2^{-\beta} \cdot \ln z_2\right)}{\delta z_1^{-\beta} + (1-\delta) z_2^{-\beta}} = \\
&= \ln\gamma + k \cdot \ln z_1^{\delta} z_2^{(1-\delta)} = \ln\left(\gamma \cdot z_1^{k\delta} \cdot z_2^{k(1-\delta)}\right).
\end{aligned}$$

[4] Érdekes módon a határtermékfüggvények, illetve a helyettesítési határarány igen.

Az ilyen

$$y = \gamma \cdot z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2}$$

alakú termelési függvényeket *Cobb-Douglas*-típusú függvényeknek hívjuk. Az ilyen termelési függvényei isoquantjai a tengelyekhez tartó, hiperbolaszerű sima görbék. A helyettesítési határarány pedig a $(0, \infty)$ intervallumban minden értéket felvesz.

□ □ □

3.C.2. Feladat. *Érdemes ebből a formából is kiszámítani a határtermékeket, a méretrugalmasságot, illetve a helyettesítési határarányt. Vegyük észre, hogy ezek megegyeznek az általános CES alakból kapott értékekkel.*

□ □ □

□ □ □

3.C.3. Feladat. ***Tökéletlen helyettesítés.*** *Legyen most $-1 < \beta < 0$! Mutassuk meg, hogy ekkor pozitív $y > 0$ termelés akár egy tényezővel is előállítható, és az ehhez az y szinthez szükséges inputráfordítás (ha a másik tényező felhasználási szintje zérus) rendre*

$$\begin{aligned} z_1 &= \delta^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\frac{1}{k}}, \text{ illetve} \\ z_2 &= (1-\delta)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Mutassa meg azt is, hogy az isoquantok ekkor ezeknél az értékeknél „belesimulnak” a tengelyekbe, azaz a helyettesítési határarány rendre zérus, illetve végtelen.

□ □ □

□ □ □

3.C.4. Feladat. ***Tökéletlen kiegészítés.*** *Legyen most $\beta > 0$! Mutassuk meg, hogy ekkor pozitív $y > 0$ termelés csak mind a két tényező felhasználásával állítható elő, és az ehhez a szinthez szükséges minimális inputráfordítás határértéke (ahogy a másik tényző felhasználási szintje a végtelenhez tart)*

$$\begin{aligned} z_1 &= \delta^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\frac{1}{k}}, \text{ illetve} \\ z_2 &= (1-\delta)^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az isoquantok aszimptotái ebben az esetben a két tengellyel párhuzamos egyenesek, amelyek a fenti pontokban metszik a tengelyeket.

□ □ □

3.D. A helyettesítés rugalmassága

Az előző pontokban láttuk, hogy a különböző (CES-típusú) technológiák isoquantjai miként viselkednek, a helyettesítési határarány milyen értéket vesz annak függvényében, hogy az isoquant mely pontján, mekkora tényezőarány mellett vizsgáljuk vizsgáljuk.

Fordítsuk meg egy kicsit ezt az utóbbi kérdést! Vegyünk egy tetszőleges isoquantot, és jelöljünk ki rajta egy adott pontot, amelyben az isoquant meredekségének abszolút értéke legyen $\eta \in (0, \infty)$! Ilyen – mint láttuk – mindig létezik, ha $\beta \in (-1, \infty)$. Próbáljuk meg végiggondolni, hogy miként változik az ehhez a ponthoz tartozó tényezőarány, ha ez az η érték változik. A (3.A–1) összefüggésből adódik a válasz. Mivel $\eta = MRTS(z_1, z_2)$, ezért

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \eta^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Miután ez a függvénykapcsolat azt írja le, hogy miként változik a tényezőarány egy adott isoquant mentén a helyettesítés arány változásának függvényében, ennek a kapcsolatnak az alakulása a tényezők közti helyettesítést jellemzi. Ha ennek a

$$\frac{z_2}{z_1} = \theta(\eta)$$

függvénynek a rugalmasságát akarjuk kiszámítani, könnyű dolgunk van, hiszen ez hatványfüggvény, ahol a rugalmasság mértéke, mint tudjuk, a kitevővel egyenlő.

3.D.1. Definíció. *Egy technológiában a* σ helyettesítési rugalmasság, *a tényezőaránynak a helyettesítési határarányra vonatkoztatott rugalmassága.*

A helyettesítés rugalmassága tehát mutatja meg, hogy a helyettesítési határarány egy százalékos megváltozására a tényezőarány hány százalékos megváltozása jut. A CES-technológiákban ez a

$$\sigma = \frac{1}{\beta+1}$$

érték állandó, a technológiát jellemző β paraméter függvénye. Innen ered maga a CES elnevezés is (Constant Elasticity of Substitution), állandó helyettesítési rugalmasságú technológia.

A *lineáris technológia* esetén, ahol $\beta = -1$, a helyettesítés rugalmassága nincs értelmezve, hiszen az isoquant meredeksége állandó, nem változik. A σ értékét itt megállapodás szerint itt a

$$\sigma = \lim_{\beta \to -1} \frac{1}{\beta + 1} = \infty$$

határértékkel tekintjük egyenlőnek.

A *Cobb-Douglas*-típusú technológiában a helyettesítés rugalmassága minden pontban egységnyi, míg a *Leontief-típusú* technológiában – szintén a határértékkel értelmezve – zérus:

$$\sigma = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta + 1} = 0.$$

3.D.2. Megjegyzés. *A helyettesítési rugalmasság fogalomnak geometriai interpretációt is adhatunk: az isoquant egy adott pontbeli görbületének mérőszámáként is felfoghatjuk.*

A következő feladat a helyettesítési rugalmasság egy gyakran használt alakjára vonatkozik.

□ □ □

3.D.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy*

$$\sigma = \frac{d \ln (z_2/z_1)}{d \ln (MRTS_{1,2}(z_1, z_2))}.$$

□ □ □

3.E. Homogén termelési függvények

Ahogy arra a 3.A.2. Megjegyzésben utaltunk a CES-típusú termelési függvények homotetikusak. E fogalom pontos definícióját egy kicsit később adjuk meg. Előbb megmutatjuk, hogy a CES-típusú termelési függvényekről még többet tudunk mondani, ugyanis az is igaz rájuk, hogy a homotetikus függvények egy alosztályába tartoznak: homogén függvények.

3.E.1. Definíció. *Egy $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ függvény $r-ed$ $(r \in Z)$* fokon homogén, *ha $\forall t > 0$ valós számra*

$$f(tz_1, \ldots, tz_N) = t^r f(z_1, \ldots, z_N).$$

□ □ □

3.E.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a CES-típusú termelési függvények $k-ad$ fokon homogének!*

□ □ □

3.E.3. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ függvény r-ed fokon homogén, differenciálható függvény, akkor tetszőleges $n = 1, \ldots, N$ esetén a $\partial f(z_1, \ldots, z_N)/\partial z_n$ parciális deriváltfüggvény $r-1$ fokon homogén.*

Bizonyítás: Rögzítsük a $t > 0$ értéket! A homogenitás definíciójából

$$f(tz_1, \ldots, tz_N) - t^r f(z_1, \ldots, z_N) = 0.$$

A két oldalt z_n szerint deriválva a láncszabállyal kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f(tz_1, \ldots, tz_N)}{\partial z_n} \cdot \frac{\mathrm{d}tz_n}{\mathrm{d}z_n} - t^r \frac{\partial f(z_1, \ldots, z_N)}{\partial z_n} = 0,$$

azaz

$$t \cdot \frac{\partial f(tz_1, \ldots, tz_N)}{\partial z_n} - t^r \frac{\partial f(z_1, \ldots, z_N)}{\partial z_n} = 0.$$

A t-vel osztva és átrendezve:

$$\frac{\partial f(tz_1, \ldots, tz_N)}{\partial z_n} = t^{r-1} \frac{\partial f(z_1, \ldots, z_N)}{\partial z_n}.$$

□

A továbbiakban többször felhasználjuk majd a homogén függvények egy speciális tulajdonságát, amit fontossága miatt külön névvel ellátott tételben mondunk ki. Ez a tétel alapvető szerepet játszik a mikroökonómiától kezdve, a munkagazdaságtanon keresztül egészen a makroökonómiáig.

3.E.4. Tétel (Euler-tétel). *Legyen az $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ függvény r-ed fokon homogén, differenciálható függvény. Ekkor tetszőleges $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$ pontra*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_n} \bar{z}_n = r f(\bar{z}).$$

Bizonyítás: A homogenitás definíciójából

$$f(t\bar{z}_1, \ldots, t\bar{z}_N) - t^r f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N) = 0.$$

Ezt az összefüggést a t változó szerint differenciálva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial f\left(t\bar{z}\right)}{\partial z_n} \frac{\mathrm{d}t\bar{z}_n}{\mathrm{d}t} - rt^{r-1} f\left(\bar{z}\right) = 0.$$

A t értékét egynek választva kapjuk a kívánt eredményt. □

Az *Euler*-tétel segítségével egyszerűen belátható, hogy egy tetszőleges differenciálható, homogén termelési függvény méretrugalmassága megegyezik a homogenitás fokával.

Tekintsünk most két olyan $z \in \mathbb{R}_+^N$ és $z' \in \mathbb{R}_+^N$ tevékenységet, amelyekre $f\left(z\right) = f\left(z'\right)$. A 3.E.3. Tételből könnyen megmutatható, hogy amennyiben f homogén függvény, akkor $\forall t > 0$, valamint minden n és n' esetén, amelyekre $n, n' = 1, \ldots, N$,

$$\frac{\frac{\partial f(z_1,\ldots,z_N)}{\partial z_n}}{\frac{\partial f(z_1,\ldots,z_N)}{\partial z_{n'}}} = \frac{\frac{\partial f(tz_1,\ldots,tz_N)}{\partial z_n}}{\frac{\partial f(tz_1,\ldots,tz_N)}{\partial z_{n'}}},$$

azaz a függvény szintvonalai „sugarasan párhuzamosak."

□ □ □

3.E.5. Feladat. *Lássuk is ezt be, a könnyebbség kedvéért, olyan homogén függvényre amelynek értelmezési tartománya* $\mathbb{R}_+^2$.

□ □ □

Ehhez a tulajdonsághoz ragaszkodva általánosíthatjuk a homogén függvények fogalmát.

3.E.6. Definíció. *Egy* $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ *függvény homotetikus, ha egy szigorúan monoton növekvő és egy elsőfokon homogén függvény kompozíciója, azaz létezik egy* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton növekvő függvény és egy* $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ *elsőfokon homogén függvény, amelyekre*

$$f\left(z\right) \triangleq \left(g \circ h\right)\left(z\right) = g\left(h\left(z\right)\right)\ \forall z \in \mathbb{R}^N - re.$$

□ □ □

3.E.7. Feladat. *Lássuk be, hogy egy* $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ *differenciálható homotetikus függvényre is igaz a sugaras párhuzamosság.*

□ □ □

Végezetül megemlítünk egy állítás, amiből egy függvény homotetikusságának másik definícióját is kaphatjuk.

3.E.8. Tétel. *Egy $f : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő függvény akkor és csak akkor homotetikus, ha minden $z \in \mathbb{R}^N_+$ és $z' \in \mathbb{R}^N_+$ tevékenységre*

$$f(z) \geqq f(z') \Longleftrightarrow f(\alpha z) \geqq f(\alpha z') \quad \forall \alpha > 0 - ra. \tag{3.E–1}$$

Bizonyítás: Először az elégségességet látjuk be, tegyük fel ezért, hogy a (3.E–1) összefüggés igaz. Vegyük észre, hogy miután f szigorúan monoton növekvő, ezért az egyenlőtlenséget – ahol arra szükségünk lesz – az általánosság megsértése nélkül egyenlőségekkel helyettesíthetjük. Jelöljük az összegzővektort az $\mathbf{1}$ szimbólummal, és definiáljuk a $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$g(t) = f(t\mathbf{1})$$

összefüggéssel. Miután f szigorúan monoton nő, ezért g is, és így létezik egy g^{-1} szigorúan monoton növekvő inverze. Legyen $h = g^{-1} \circ f$, azaz $h : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$,

$$h(z) = g^{-1}(f(z)).$$

Ekkor

$$g \circ h = g \circ \left(g^{-1} \circ f\right) = \left(g \circ g^{-1}\right) \circ f = f.$$

Annyit kell tehát csak belátnunk, hogy h első fokon homogén. A h függvény definíciójából kapjuk, hogy tetszőleges $h(z)$ értékre

$$f(z) = f(h(z)\mathbf{1}). \tag{3.E–2}$$

Legyen $\alpha > 0$ tetszőleges. Ekkor a (3.E–1) összefüggésből

$$[f(z) = f(h(z)\mathbf{1})] \Longrightarrow [f(\alpha z) = f(\alpha h(z)\mathbf{1})].$$

Ezt összevetve a (3.E–2) egyenlőséggel kapjuk, hogy

$$f(\alpha h(z)\mathbf{1}) = f(\alpha z) = f(h(\alpha z)\mathbf{1}),$$

amiből

$$h(\alpha z) = \alpha h(z),$$

azaz h valóban első fokon homogén.

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy a szigorúan növekvő f homotetikus, azaz $f = g \circ h$, ahol g szigorúan növekvő és h első fokon homogén. Legyen $f(z) \geqq f(z')$ és $\alpha > 0$. A g szigorúan monoton lévén létezik szigorúan monoton növő inverze g^{-1}. Erre

$$g^{-1}(f(z)) \geqq g^{-1}(f(z')),$$

amiből

$$h(z) \geqq h(z').$$

A h függvény első fokú homogenitásából

$$h(\alpha z) = \alpha h(z) \geqq \alpha h(z') = h(\alpha z').$$

A g függvény monotonitási tulajdonságából

$$g(h(\alpha z)) \geqq g(h(\alpha z')),$$

amiből

$$f(\alpha z) \geqq f(\alpha z').$$

Ez pont az, amit bizonyítani akartunk. □

3.E.9. Megjegyzés. *Vegyük észre: egy homotetikus függvény szigorúan monoton növekvő transzformációja is homotetikus függvényt eredményez.*[5] *Erre az észrevételre a későbbiekben nagy szükségünk lesz.*

[5] Ez az állítás nem igaz a homogén függvényekre: egy homogén függvény szigorúan monoton növekvő transzformációja nem feltétlenül homogén.

4. fejezet

Profitmaximalizálás és a profitfüggvény

Ebben a pontban a termelő céljával és döntésével foglalkozunk. Ha a termelőre úgy tekintünk, ahogy eddig, és azt mondjuk, hogy a javak transzformálása az egyetlen feladata és tevékenysége, akkor nem ellentmondásos, hogy célját e tevékenységének leggyümölcsözőbb végrehajtásában jelöljük meg. Miután ez a „leggyümölcsözőbb" szó további magyarázat nélkül nem jól definiált, érdemes ezt kétféleképpen is megvilágítani. Egyrészt nyilván azt jelenti, hogy a transzformáció közben nem szabad pazarolni, azaz a tevékenységnek hatékonynak kell lennie. Másrészt azonban – miután az előbbi mondat messze nem ad egyértelmű útmutatást – érdemes az összes hatékony és nem hatékony tevékenységet valamilyen más szempont szerint értékelni. Ez a szempont a *jövedelmezőség*, más szóval a profitabilitás. A jövedelmezőség ebből a szempontból nem más, mint a tevékenységben szereplő javak egyfajta, árakon keresztül történő aggregálása.

4.A. A termelő feladata

A termelőről eddig feltettük, hogy cselekedeteit a technológiai viszonyok, lehetőségek korlátozzák. Most további korlátokat állítunk döntése elé. Az első ilyen korlát jogi természetű: az árdiszkrimináció tiltását tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy jószágfajtánként minden általa termelt jószágegységet ugyanazon az áron kell értékesítenie, és inputjószágonként minden jószágegységet ugyanazon az áron kell beszereznie.A második korlát gazdasági természetű: a termelőt a piacok korlátozzák. Az általa kiválasztott áron nem tud eladni és beszerezni annyi jószágegységet amennyit csak akar. Ezeket a korlátokat a továbbiakban a termelő terméke iránt megnyilvánuló piaci keresleti és az ő általa beszerzendő erőforrásokra vonatkozó piaci kínálati görbék, az úgynevezett *egyedi keresleti és kínálati görbék,* illetve azok inverzei reprezentálják. A továbbiakban ezekre a függvényekre egy vitális fontosságú feltétel teljesülését is feltesszük:

4.A.1. Feltevés. *A termelőről feltesszük, hogy a maga piaci erejét abszolút jelentéktelennek tekinti, úgy véli, hogy az adott, nem általa meghatározott piaci árakat megváltoztatni nem képes, ezért nem áldoz erőforrást, időt, pénzt arra, nem tesz stratégiai lépéseket annak érdekében, hogy kisérletet tegyen e változtatásra. Úgy véli továbbá, hogy ezek mellett az árak mellett annyi jószágegységet ad el, illetve vásárol, amennyit csak akar. Ekkor az egyedi keresleti, illetve kínálati függvények a szóban forgó árak által adott értékeken vízszintesek. Összefoglalva: a termelő* árelfogadó.

4.A.2. Megjegyzés. *Érdemes felhívnunk a fihgyelmet arra, hogy ezt a termelő* viselkedésére *vonatkozó feltevést nem feltétlenül kell elfogadnunk. Ez egy magatartási szabály, aminek indokoltsága erősen kétséges. Egyelőre azonban tekintsünk el attól, hogy megkérdőjelezzük az érvényesülését, és fogadjuk el. A későbbiekben még visszatérünk erre.*

Írjuk fel most az eddigiek alapján – *nettó ábrázolásmódban* – a termelő döntését, amit egy feltételes szélsőérték-számítási feladat megoldásaként értelmezünk. A termelési halmazt adjuk meg most az általános transzformációs fügvény segítségével, és jelöljük a termelő számára adott árakat a $p \in \mathbb{R}^N$ szimbólummal! Ekkor a megoldandó feladat:

$$\max_{x \in Y} py \tag{PMF}$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \,| F(y) \leqq 0 \,. \right\} \tag{4.A–1}$$

Korántsem biztos, hogy ez a feladat megoldható, ebben az általános formában nincs garancia arra, hogy a célfüggvény korlátos, vagy a feltétel által adott halmazon tényleg felveszi a maximumát.

□ □ □

4.A.3. Feladat. *Keressünk – ne túl triviális – példát olyan technológiai halmazra, amely mellett a célfüggvény nem korlátos, és olyanra, ami mellett nem veszi fel a maximumát!*

□ □ □

4.A.4. Segédtétel. *Legyen az Y termelési halmazra érvényes a díjmentes lomtalanítás feltétele! Ekkor azokanak a nemzérus árvektoroknak a $P^{\max} \subset \mathbb{R}^N$ halmazára, amelyek mellett létezik profitmaximalizáló tevékenység, igaz, hogy $P^{\max} \subset \mathbb{R}^N_+$.*

Bizonyítás: Ha egy árvektornak van negatív eleme, akkor a díjmentes lomtalanítás feltételéből következően nem korlátos az Y halmaz elemeivel vett, az adott árvektorral képzett skaláris szorzat. □

A továbbiakban mindig feltesszük a következő feltevés teljesülését:

4.A.5. Feltevés. *Az Y termelési halmaz nem üres, zárt, és érvényes rá a díjmentes lomtalanítás feltétele, valamint $p > 0$,azaz szigorúan pozitív.*

Még e feltevés teljesülése esetén sem feltétlenül igaz, hogy a termelő (PMF) feladata megoldható. Legyen $P^0 \subseteq \mathbb{R}^N_{++}$azon pozitív vektorok halmaza, ami mellett van megoldása a profitmaximalizálási feladatnak. Ekkor definiálhatjuk a termelő profitfüggvényét:

$$\pi : P^0 \to \mathbb{R}, \quad \pi(p) = \max_{y \in Y} py,$$

valamint kínálati leképezését:

$$y : P^0 \rightrightarrows \mathbb{R}^N, \quad y(p) = \{y \in Y \,|py = \pi(p)\}.$$

A kínálati leképezés nem feltétlenül egyértékű, azaz pont–halmaz leképezés. Elemei nem feltétlenül pozitív előjelű vektorok, a „kínálati” jelző tehát kissé pongyola, ha egy kínálati vektor egy eleme negatív előjelű, akkor természetesen a termelő keresletéről van szó. Szerencsésebb lenne tehát a nettó kínálati leképezés elnevezés, de miután félreértést nem okoz, maradunk az egyszerűbb szóhasználatnál, annál is inkább, mert ez az általános szokás.

4.A.6. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy azokban a pontokban, ahol a profitfüggvény jól definiált, ott megegyezik az Y halmaz támaszfüggvényével. Emiatt a tulajdonságai is megegyeznek a támaszfüggvény tulajdonságaival. Ezt a későbbiekben többször kihasználjuk majd.*

□ □ □

4.A.7. Feladat. *Legyen Y zárt, konvex kúp, azaz a termelési halmazban legyen igaz az állandó mérethozadék! Y további tulajdonságainak függvényében határozza meg, a P^0 halmazt, illetve minél teljesebben jellemezze a π függvényt és az y leképzést!*

□ □ □

4.A.8. Tétel. *Legyen $p^* \in P^0$, és $y^* \in y(p^*)$. Ekkor $y^* \in Y^0$, azaz hatékony tevékenység.*

Bizonyítás: Indirekt módon, tegyük fel, nem az. Ekkor létezik olyan $y' \in Y$ termelési tevékenység, amire $y^* \leqq (\neq)\, y'$. Ekkor – mivel p^* szigorúan pozitív –,

$p^*y^* < p^*y'$, azaz $y^* \notin y(p^*)$. Ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állításunk igaz.

□

Noha szigorúan véve nem illik tárgyalásunk menetébe, mégis érdemes e tétel egyfajta megfordítását is megvizsgálnunk.

4.A.9. Tétel. *Legyen az Y termelési halmaz konvex (nem üres, zárt és érvényes rá a díjmentes lomtalanítás). Ekkor tetszőleges $y^0 \in Y^0$ esetén találhatunk olyan $p^0 \geqq (\neq) 0$ árvektort, amire $y^0 \in y\left(p^0\right)$, azaz tetszőleges hatékony termelési tevékenységhez találhatunk olyan legalább szemipozitív árvektort, ami mellett a szóban forgó tevékenység profit-maximalizáló.*

Bizonyítás: Egy tetszőleges $y^0 \in Y^0$ tevékenységhez definiáljuk a

$$Y^0_> \triangleq \left\{y' \in \mathbb{R}^N \left| y' > y^0 \right.\right\}$$

halmazt! Miután y^0 hatékony, ezért

$$Y^0_> \cap Y = \emptyset.$$

Azt is vegyük észre, hogy $Y^0_>$ konvex, ezért szeparálhatjuk a zárt és szintén konvex Y termelési halmaztól egy zérustól különböző $p^0 \neq 0$ vektor segítségével úgy, hogy

$$p^0 y' \geqq p^0 y \quad \forall y' \in Y^0_> \text{ } \textit{és} \text{ } \forall y \in Y \text{ esetén.}$$

Ebből a termelési halmazra érvényes díjmentes lomtalanítási feltétellel az is következik, hogy $p^0 \geqq (\neq) 0$. Tegyük most fel, hogy y^0 nem profitmaximalizáló. Ekkor egyrészt létezne $y \in Y$, amire $p^0 y - p^0 y^0 = \varepsilon > 0$,másrészt választhatjuk az $y' \in Y^0_>$ vektort tetszőleges közel az y^0 vektorhoz, azaz $p^0 y' - p^0 y^0 < \varepsilon$, amiből

$$p^0 y' < p^0 y,$$

de ez ellentmond a szeparációs feltételnek. □

Vizsgáljuk tovább a (PMF) profitmaximalizálási feladatot! Miután láttuk, hogy amennyiben van megoldása a $p \in P^0$ pontban, akkor a megoldásvektor szükségképpen hatékony, ezért nem követünk el hibát, ha a feltételben szereplő egyenlőtlenséget egyenlőségként kezeljük.[6] Ha az F transzformációs függvény differenciálható, akkor ebből a (PMF) $y^* \in y(p)$ megoldásának elsőrendű feltételei[7] a következők:

$$p_n = \lambda \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_n}, \quad \lambda \geqq 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

[6] Ez azzal a haszonnal is jár majd, hogy a profitfüggvényt a (PMF) értékfüggvényeként értelmezhetjük, és differenciálható esetben közvetlenül használhatóvá válik a burkolótétel.

[7] Ha a technológia konvex (az F transzformációs függvény konvex), akkor ezek a feltételek nem csak szükségesek, hanem elégségesek is.

Eszerint egy profitmaximalizáló pontban a transzformációs felület gradiense és az árvektor egymás skalárszorosai, másképpen a

$$\frac{dy_k}{dy_l}, \quad l, k = 1, \ldots, N$$

transzformációs ráták ellentetjei a megfelelő árarányokkal megegyeznek:

$$\frac{\partial F\left(y'\right)/\partial y_l}{\partial F\left(y'\right)/\partial y_k} = \frac{p_l}{p_k} \quad l, k = 1, \ldots, N \tag{4.A–2}$$

□ □ □

4.A.10. Feladat. *Értelmezzük az (4.A–2) feltételeket a transzformációs ráták három különböző fajtájára!*

□ □ □

4.B. A profitfüggvény tulajdonságai

Tegyük most félre a differenciálhatósági feltevést[8], és gyűjtsük össze a $\pi : P^0 \to \mathbb{R}$ profitfüggvény és az $y : P^0 \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ megoldásleképezés tulajdonságait!

4.B.1. Tétel. *Legyen Y nemüres, zárt, és legyen rá érvényes a díjmentes lomtalanítás feltétele! Ekkor*

(i) $\pi(p)$ első fokon homogén;

(ii) $\pi(p)$ konvex;

(iii) $\pi(p)$ nemnegatív, ha a tétlenség lehetséges;

(iv) $y(p)$ 0-ad fokon homogén;

(v) (*Hotelling*-lemma) ha $\pi(p)$ differenciálható egy $\bar{p}$ pontban, akkor $\forall n$-re

$$\frac{\partial \pi(\bar{p})}{\partial p_n} = y_n(\bar{p}),$$

azaz $y_n(\bar{p})$ egyértelmű;

(vi) ha $\pi(p)$ kétszer folytonosan differenciálható egy $\bar{p}$ pontban, akkor a

$$\mathrm{D}^2\pi(\bar{p}) = \mathrm{D}y(\bar{p})$$

Hesse-mátrix szimmetrikus, pozitív szemidefinit, és

$$\mathrm{D}^2\pi(\bar{p})\,\bar{p} = \mathrm{D}y(\bar{p})\,\bar{p} = 0; \tag{4.B–1}$$

[8] Persze a kimondandó tételben – bizonyos pontoknál – visszecsempésszük.

(vii) ha ráadásul Y konvex is, akkor

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \, | py \leqq \pi(p) \quad \forall p > 0\text{-ra} \right\};$$

(viii) ha Y konvex, akkor $y(p)$ is az;

(ix) ha Y szigorúan konvex, azaz hatékony határának nincs (lineáris) szakasza, akkor $y(p)$ egyértelmű, azaz függvény;

(x) ha Y szigorúan konvex, akkor $\pi(p)$ differenciálható.

Bizonyítás: Az (i) és (ii) pontok azonnal következnek abból, hogy a profitfüggvény a technológia támaszfüggvénye.

A (iii) tulajdonság triviális, mert tetszőleges $p \in P^0$ ár mellett a tétlenség biztosítja a nemnegatív profitot.

A (iv) pont bizonyításához tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz $y(p) \neq y(tp)$ valamely $t > 0$ skalár esetén. Válasszunk ki most a két halmazból rendre két nem egyenlő vektort: $y^1(p) \neq y^2(tp)$. A profitfüggvény definíciójából

$$t\pi(p) = tpy^1(p) \neq (tp)\, y^2(tp) = \pi(tp),$$

ami ellentmond a profitfüggvény első fokú homogenitásának.

Az (v) pont közvetlenül jön a dualitási tételből, és ha az egyértelműséget (másképpen) bizonyítottuk, akkor akár a burkolótételből.

A (vi) tulajdonoságok közül a szimmetricitás a *Young*-tétel következménye, a pozitív szemidefinitség a profitfüggvény konvexitásából azonnal adódik, a (4.B–1) egyenlőséget pedig az *Euler*-tételből kapjuk a megoldásleképezés 0-ad fokú homogenitásával.

A (vii) tulajdonság megintcsak a támaszfüggvényre mondottak miatt igaz.

A (viii) tulajdonság bizonyítása sem nehéz. Tegyük fel, hogy $y^1, y^2 \in y(p)$ és $y^1 \neq y^2$. Ekkor teszőleges $\lambda \in (0,1)$ esetén

$$\lambda py^1 + (1-\lambda)\, py^2 = p\left(\lambda y^1 + (1-\lambda)\, y^2\right) = py^\lambda.$$

Mivel Y konvex, ezért egyrészt $y^\lambda \in Y$, másrészt nyilvánvalóan $y^\lambda \in y(p)$, azaz y^λ profitmaximalizáló termelési.tevékenység. Ez pedig pont az $y(p)$ halmaz konvexitását jelenti.

A (ix) pont bizonyításához megintcsak tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz legyen $y^1, y^2 \in y(p)$ és $y^1 \neq y^2$. Ekkor – hasonlóan az előző ponthoz – teszőleges $\lambda \in (0,1)$ esetén $y^\lambda \in y(p)$, azaz y^λ profitmaximalizáló termelési tevékenység. Miután azonban $p > 0$, ezért a 4.A.8. Segédtétellel y^λ hatékony tevékenység, ami összevetve azzal, hogy $\lambda \in (0,1)$ teszőleges volt, ellentmond annak, hogy a technológia hatékony határa nem tartalmaz (lineáris) szakaszt.

A (x) pontban a profitfüggvény differenciálhatósága pedig a dualitási tétel folyománya, hiszen ilyenkor $y(p)$ függvény, azaz minden p-re egyértelmű, ahogy azt az előző pontban láttuk. □

□ □ □

4.B.2. Feladat. *A támaszfüggvény tulajdonságaira, illetve a burkoló tételre való hivatkozás nélkül lássuk be a 4.B.1. Tétel (i)-(ii), illetve a (v) pontjait!*

□ □ □

□ □ □

4.B.3. Feladat. *Legyen $y \in y(p)$és $y' \in (p')$.Igazoljuk a „kínálat törvényét”, miszerint*

$$(p - p')(y - y') \geqq 0! \tag{4.B–2}$$

□ □ □

Nézzük meg most a „kínálat törvényét” abban az esetben, ha a profitfüggvény kétszer folytonosan differenciálható! Ekkor (4.B–2) infitezimális változásra a

$$\mathrm{d}p\mathrm{d}y \geqq 0 \tag{4.B–3}$$

alakot ölti. A Hotelling-lemma értelmében

$$\mathrm{d}y = \mathrm{D}^2\pi(p)\,\mathrm{d}p,$$

amit összevetve a (4.B–3) egyenlőtlenséggel kapjuk, hogy a profitfüggvény Hesse-mátrixának pozitív szemidefinitsége nem más mint a „kínálat törvényének” egy másik alakja.

Ábrázoljuk most a technológiát bruttó szemléletben, és legyenek a jószág-funkciók determináltak! Tegyük fel – pusztán az egyszerűség kedvéért – azt is, hogy a termelő csak egy terméket termel! Legyen e termék ára $p > 0$, és jelöljük az inputok árvektorát a $w \in \mathbb{R}^N_{++}$szimbólummal! Ekkor a (PMF) átírható a következő alakba:

$$\max_{y \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}^N_+} py - wz \tag{PMF'}$$

$$y \leqq f(z) \tag{4.B–4}$$

□ □ □

4.B.4. Feladat. *Definiáljuk a (PMF') feladathoz tartozó profitfüggvényt és a megoldásleképezéseket! Fogalmazzuk át a 4.B.1. Tételt erre a feladatra, és próbáljuk bebizonyítani! Mit tudunk mondani profitfüggvény monotonitási tulajdonságairól?*

□ □ □

□ □ □

4.B.5. Feladat. *Mit tudunk mondani differenciálható esetben a megoldásfügg-vények monotonitási tulajdonságairól? (A kínálati, illetve az inputkeresleti függ-vényekről van szó.)*

□ □ □

5. fejezet

Költségminimalizálás és a költségfüggvény

Tekintsük ismét a termelő (PMF) feladatát, és tegyük fel, hogy egy $p \in P^0$ ár melletti $y(p)$ megoldásvektorban egyaránt van pozitív és negatív elem. Jelöljük ezek indexhalmazát rendre az $\mathcal{N}^+$, illetve $\mathcal{N}^-$ szimbólummal! Ekkor nyilván

$$\pi(p) = \sum_{n \in \mathcal{N}^+} p_n y_n(p) - \sum_{n' \in \mathcal{N}^-} p_{n'}(-y_{n'}(p)).$$

A profitmaximalizálás definíciójából kapjuk, hogy minden,

$$Z\left(y^+(p)\right) \triangleq \left\{y \in Y \,|y_n = y_n(p),\ \forall n \in \mathcal{N}^+ - re\right\}$$

halmazbeli

$$y'(p) \in Z\left(y^+(p)\right)$$

esetén

$$\pi(p) \geqq \sum_{n \in \mathcal{N}^+} p_n y_n(p) - \sum_{n' \in \mathcal{N}^-} p_{n'}(-y'_{n'}(p)),$$

azaz

$$\pi(p) = \sum_{n \in \mathcal{N}^+} p_n y_n(p) - \min_{y'(p) \in Z(y^+(p))} \sum_{n' \in \mathcal{N}^-} p_{n'}(-y'_{n'}(p)). \tag{5.–1}$$

Másképpen: a p ár melletti maximális profit nagysága egyenlő a profitmaximalizáló termelési vektorban szereplő termékekből (pozitív nettó kibocsájtásból) származó bevétel és az azokat az adott technológiában előállítani képes inputok minimális költségének különbségével.[9] Ebből azonnal következik, hogy amennyiben a termelő maximalizálta a profitját, akkor egyben minimalizálta az adott kibocsájtást

[9] A $Z\left(y^+(p)\right)$ halmazt tekinthetjük az $y^+(p)$ kibocsájtáshoz tartozó inputigényhalmaznak. Azért élünk a szövegbeli rendkívül bonyolultnak tűnő megfogalmazással, mert a technológiát most nettó ábrázolásmódban adtuk meg.

lehetővé tevő költségeit is. A költségminimalizálás tehát a profitmaximalizálás szükséges feltétele. Ebből azt is láthatjuk, hogy amennyiben egy termelő (PMF) feladatának egy $p \in P^0$ ár mellett van megoldása, akkor a (5.–1) egyenlőségben szereplő minimumfeladat is megoldható, a minimum felvétetik.

Azt is láttuk korábban, hogy bizonyos – extrémnek egyáltalán nem nevezhető – esetekben a (PMF) nem megoldható. Felmerül a kérdés: ekkor egy adott outputszerkezethez tartozó költségminimalizáló inputszerkezet sem létezik? Szerencsére a válasz erre a kérdésre tagadó, létezhet ilyen inputszerkezet, azaz a költségminimalizálás akkor is végrehajtható, amikor a profitmaximalizálás nem. Vizsgáljuk meg tehát ezt a problémát közelebbről!

5.A. A költségminimalizálási feladat

Most bruttó ábrázolásmódban adjuk meg a technológiát, és a jószágfunkciók determináltak lesznek. Jelöljuk az inputok árát a $w \in \mathbb{R}^{N_i}$ szimbólummal! Ekkor a termelő feladata a következő alakot ölti:

$$\min_{z \in \mathbb{R}_+^{N_i}} wz \tag{(TT)KMF}$$

$$z \in Z(y). \tag{5.A–1}$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban vizsgálatunkat azokra az esetekre korlátozzuk, ahol csak egy terméket termelünk (azaz $N_o = 1$) és a technológiára és az inputárakra érvényes lesz a a következő feltevés:[10]

5.A.1. Feltevés. *Legyen az Y technológia nem üres, zárt, és legyen rá érvényes a díjmentes lomtalanítás, valamint a nincsen rózsa tövis nélkül feltétel! Legyen minden $y \in Y^+$ esetén*

$$Z(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}_+^N \,|y \leqq f(z) \right\},$$

ahol $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Az inputárakról – a profitmaximalizálási feladathoz hasonlóan – a továbbiakban feltesszük a szigorú pozitivitást, azaz $w > 0$.

Ekkor ez a feladat a következő formába írható:

$$\min_{z \in \mathbb{R}_+^N} wz \tag{KMF}$$

$$y \leqq f(z). \tag{5.A–2}$$

Ez esetben – szerencsénkre – igaz a következő segédtétel:

[10] A továbbiakban a jelölés egyszerűsítése érdekében az N_i szimbólumból elhagyjuk az inputokra való utalást, mert ez semmiféle félreértést nem okozhat.

5.A.2. Segédtétel. *Ha $y \in Y^+$, a (KMF) feladatnak minden pozitív inputár mellett létezik megoldása.*

Bizonyítás: Miután $y \in Y^+$, ezért mindenképpen létezik legalább egy olyan $\hat{z} \in \mathbb{R}^N_+$, amire $y \leqq f(\hat{z})$. Ekkor az inputárak pozitivitása miatt a

$$\hat{z}(w) = \left\{ z \in \mathbb{R}^N_+ \,|wz \leqq w\hat{z} \right\}$$

halmaz zárt és korlátos. Az f termelési függvény folytonosságából következően a

$$Z(y) \cap \hat{z}(w)$$

metszet is zárt és korlátos. Ezen a folytonos skaláris szorzat – a Weierstrass-tétel értelmében – felveszi a minimumát. □

A 5.A.2. Segédtétel értelmében tehát definiálhatjuk a következő függvényt:

5.A.3. Definíció. *A $c : \mathbb{R}^N_{++} \times Y^+ \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol $c(w, y)$ az értelmezési tartományának minden pontjában a (KMF) feladat célfüggvényértékével egyezik meg, az Y technológiához tartozó (teljes)*költségfüggvény*nek nevezzük.*

5.A.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy minden $y \in Y^+$ outputra a $c(w, y)$ költségfüggvény nem más mint a $Z(y)$ inputigényhalmaz támaszfüggvényének ellentettje.*

Tekintsük most a következő leképezést:

$$\begin{aligned} z \quad &: \quad \mathbb{R}^N_{++} \times Y^+ \rightrightarrows \mathbb{R}^N_+, \\ z(w, y) \quad &= \quad \{z \in Z(y) \,|wz = c(w, y)\}. \end{aligned} \tag{5.A–3}$$

5.A.5. Definíció. *A (5.A–3) leképezés az Y technológiához tartozó megoldásleképezés, más szóhasználattal* a feltételes tényezőkeresleti (inputkeresleti) *leképezése.*

□ □ □

5.A.6. Feladat. *Mutassuk meg, hogy minden*

$$\forall z^0 \in z(w, y) - re, \;\; y = f\left(z^0\right)! \tag{5.A–4}$$

□ □ □

5.A.7. Megjegyzés. *A 5.A.6. Feladatból látszik, hogy nem követünk el hibát, ha a termelő (KMF) feladatának feltételében az egyenlőtlenséget egyenlőséggel helyettesítjük. Ha ezt megtesszük, akkor észrevehetjük azt is, hogy a költségfüggvény nem más mint az így módosított (KMF) értékfüggvénye, és így differenciálható esetben a burkolótétel is közvetlenül alkalmazható.*

Tegyük most fel, hogy az f termelési függvény folytonosan differenciálható! Ekkor a (KMF) megoldásának elsőrendű feltételei $n = 1, \ldots, N$-re következők:

$$\lambda^* (w, y) \frac{\partial f (z^*)}{\partial z_n} - w_n \leqq 0, \text{ illetve } = 0, \text{ ha } z_n^* > 0, \tag{5.A–5}$$
$$y - f (z^*) \leqq 0, \text{ illetve } = 0, \text{ ha } \lambda^* (w, y) > 0. \tag{5.A–6}$$

Ha az Y technológia konvex, azaz az f termelési függvény konkáv, akkor ezek a feltételek elégségesek is. Vegyük azonban észre, hogy az elégéségességhez csak annyi kell, hogy az imputigényhalmazok legyenek konvexek, azaz elegendő, ha a termelési függvény *kvázikonkáv*! Azaz a (KMF) jól viselkedhet akár nemcsökkenő hozadék esetében is, ami mellett a (PMF) egyértelműen biztos nem megoldható!

A (5.A–5) feltételekből kapjuk, hogy egy z^* belső optimumpontban két inputjószágra a technikai helyettesítés határaránya[11] a megfelelő inputjavak árarányával egyezik meg, azaz az $1 \leqq l \neq k \leqq N$ egész számokra

$$MRTS_{l,k} (z^*) = \frac{\partial f (z^*) / \partial z_l}{\partial f (z^*) / \partial z_k} = \frac{w_l}{w_k}.$$

Vegyük észre, hogy – nem meglepő módon – ez pontosan az a feltétel, amit a (PMF) feladatból is nyertünk. Emellett a (KMF) feladat tulajdonságaiból az is következik, hogy az optimumban

$$\lambda^* (w, y) = \frac{\partial C (w, y)}{\partial y} = MC (w, y),$$

azaz az optimumban a feltételhez rendelt duálváltozó értéke a technológia w inputárak melletti határköltségét adja.

5.B. A költségfüggvény tulajdonságai

Tegyük most félre a differenciálhatósági feltevést[12], és gyűjtsük össze a

$$c : \mathbb{R}^N_{++} \times Y^+ \to \mathbb{R}$$

költségfüggvény és a

$$z : \mathbb{R}^N_{++} \times Y^+ \rightrightarrows \mathbb{R}^N_+$$

megoldásleképezés tulajdonságait!

5.B.1. Tétel. *Legyen az Y technológiára érvényes a 5.A.1. Feltevés! Ekkor*

(i) $c (w, y)$ első fokon homogén w-ben;

[11] Precízebben: a határarány abszolút értéke

[12] Persze a kimondandó tételben – bizonyos pontoknál – visszecsempésszük.

(ii) $c(w, y)$ monoton nő w-ben, és szigorúan monoton nő y-ban;

(iii) $c(w, y)$ konkáv w-ben;

(iv) $c(w, y)$ nemnegatív, ha a tétlenség lehetséges; egyébként pozitív.

(v) $z(w, y)$ 0-ad fokon homogén

(vi) $c(w, y)$ folytonos w-ben;

(vii) (*Shephard*-lemma) ha $c(w, y)$ differenciálható egy $\bar{w}$ pontban, akkor $\forall n - re$

$$\frac{\partial C(\bar{w}, y)}{\partial w_n} = z_n(\bar{w}, y),$$

azaz $z_n(\bar{w}, y)$ egyértelmű;

(viii) ha $c(w, y)$ kétszer folytonosan differenciálható egy $\bar{w}$ pontban, akkor a

$$\mathrm{D}^2 c(\bar{w}, y) = \mathrm{D}z(\bar{w}, y)$$

Hesse-mátrix szimmetrikus, negatív szemidefinit, és

$$\mathrm{D}^2 c(\bar{w}, y)\,\bar{w} = \mathrm{D}z(\bar{w}, y)\,\bar{w} = 0; \tag{5.B–1}$$

(ix) ha ráadásul $\forall y \in Y^+$ esetén a $Z(y)$ halmaz konvex is, akkor

$$Y = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^N \,|wz \geqq c(w, y) \quad \forall w > 0\text{-ra}\right\};$$

(x) ha $Z(y)$ konvex, akkor $z(w, y)$ is az;

(xi) ha $Z(y)$ szigorúan konvex, azaz hatékony határának nincs (lineáris) szakasza, akkor $z(w, y)$ egyértelmű, azaz függvény;

(xii) ha $Z(y)$ szigorúan konvex, akkor $c(\bar{w}, y)$ differenciálható w-ben.

Bizonyítás: A 5.A.4. Megjegyzés értelmében most is hivatkozhatunk a támaszfüggvény tulajdonságaira. Ebből (i) és (iii) azonnal következik.

A (ii) pont első állításának bizonyításához tegyük fel, hogy y rögzített és $w' \geqq (\neq)\ w$. Legyen $z' \in z(w', y)$! Ekkor $c(w, y) \leqq wz' \leqq w'z' = c(w', y)$. A második állításhoz tegyük fel, hogy $c(w, y)$ nem nő szigorúan monoton módon y-ban. Legyen $y' > y > 0$, $z' \in z(w, y')$ és $z \in z(w, y)$, valamint $0 < wz' \leqq wz$. Legyen $z(\lambda) = \lambda z'$, $\lambda \in (0, 1)$. Miután az f termelési függvény folytonos, ezért létezik olyan λ,ami elég közel van 1-hez, és $f(z(\lambda)) > y$, és $wz(\lambda) < wz$, ami ellentmond annak, hogy a termelő az y termelés mellett minimalizálta költségeit.

A (iv) tulajdonság triviálisan következik a 5.A.1. Feltevésből.

Az (v) pontot is indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik egy $t > 0$ esetén olyan $z \in z(w, y)$ és $z^t \in z(tw, y)$, amikre $z \neq z^t$. Ekkor

$$tc(w, y) = twz \neq (tw) z^t = c(tw, y),$$

ami ellentmond a költségfüggvény inputárakbeli elsőfokú homogenitásának.

A (vi) tulajdonság igazolásához egy adott y érték mellett tekintsünk egy olyan w^q, $q = 1, 2, \ldots$ árvektorsorozatot, amire $w^q \to w^0$ és minden q-ra

$$w' \leqq w^q \leqq w''.$$

Tartozzanak ezekhez rendre a z^q, illetve z^0 költségminimalizáló inputvektorok. Ezek a feltevések szerint a

$$\left\{ z \in \mathbb{R}_+^N \left| w'z \leqq w''z^0 \right. \right\}$$

zárt, korlátos, tehát kompakt halmazban vannak. Így z^q-nak létezik konvergens részsorozta, legyen ennek határértéke z^*. Erre az inputvektorra: $z^* \in Z(y)$, hiszen a technológia zártságából az inputigényhalmaz zártsága is következik. Vegyük most ezt a részsorozatot, és indexeljünk át! Ekkor a költségfüggvény definíciójából és a skaláris szorzat folytonosságából igazak a következők:

$$c(w^q, y) \leqq w^q z^0, \tag{5.B–2}$$
$$c\left(w^0, y\right) \leqq w^0 z^*, \tag{5.B–3}$$
$$w^q z^0 \to w^0 z^0 = c\left(w^0, y\right) \tag{5.B–4}$$
$$w^q z^q \to w^0 z^* \tag{5.B–5}$$

A (5.B–2) egyenlőtlenségből és a (5.B–4) határátmenetből minden q-ra:

$$c(w^q, y) \leqq c\left(w^0, y\right)$$

A (5.B–3) egyenlőtlenségből és a (5.B–5) határátmenetből:

$$c\left(w^0, y\right) \leqq \lim_{q \to \infty} c(w^q, y) = w^0 z^*$$

Ezt a gondolatmenetet az eredeti z^q sorozat bármely határpontjára alkalmazhatjuk, ezért

$$\lim_{q \to \infty} c(w^q, y) = c\left(w^0, y\right).$$

A (vii) pont közvetlenül jön a dualitási tételből, és ha az egyértelműséget esetleg másképpen bizonyítottuk, akkor akár a burkolótételből.

A (viii) tulajdonoságok közül a szimmetricitás a *Young*-tétel következménye, a negatív szemidefinitség a költségfüggvény konkavitásából azonnal adódik, a (5.B–1) egyenlőséget pedig az *Euler*-tételből kapjuk a megoldásleképezés 0-ad fokú homogenitásával.

A (ix) tulajdonság megintcsak a támaszfüggvényre mondottak miatt igaz.

A (x) pont bizonyítása sem nehéz. Tegyük fel, hogy $z^1, z^2 \in z(w,y)$ és $z^1 \neq z^2$. Ekkor teszőleges $\lambda \in (0,1)$ esetén

$$\lambda w z^1 + (1-\lambda)\, w z^2 = w\left(\lambda z^1 + (1-\lambda)\, z^2\right) = w z^\lambda.$$

Mivel $Z(y)$ konvex, ezért egyrészt $z^\lambda \in Z(y)$, másrészt nyilvánvalóan $z^\lambda \in z(w,y)$, azaz z^λ költségminimalizáló inputszerkezet. Ez pedig pont az $z(w,y)$ halmaz konvexitását jelenti.

A (xi) pont bizonyításához megintcsak tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz legyen $z^1, z^2 \in z(w,y)$ és $z^1 \neq z^2$. Ekkor – hasonlóan az előző ponthoz – teszőleges $\lambda \in (0,1)$ esetén $z^\lambda \in z(w,y)$, azaz z^λ is költségminimalizáló inputszerkezet. Miután azonban a $Z(y)$ inputigényhalmaz szigorúan konvex, ez ellentmondás, hiszen λ tetszőleges volt az $(0,1)$ intervallumon.

A (xii) pontban a költségfüggvény differenciálhatósága a dualitási tétel folyománya, hiszen ilyenkor $z(w,y)$függvény, ahogy azt az előbb láttuk..

□

□ □ □

5.B.2. Feladat. *Bizonyítsuk be a 5.B.1. Tételt, arra az esetre is, ha a termelő több terméket termel, azaz $0 < N_0 < \infty$. Figyeljünk arra, hogy ekkor a (TT)KMF feladatra mondjuk ki a tételt!*

□ □ □

A következő tételünk azonban csak olyan esetre vonatkozik, amikor a termelő csak egy terméket termel.

5.B.3. Tétel. *Legyen az $f : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ termelési függvény szigorúan kvázikonkáv*[13] *és homotetikus! Ekkor a technológiához tartozó költségfüggvény szeparábilis az outputban, illetve az inputárakban, azaz felírható a következő alakban:*

$$c(w,y) \equiv \gamma(y)\, c(w,1),$$

ahol $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ szigorúan monoton nő, és $c(w,1)$ az egységnyi termelés költsége.

Hasonlóképpen, a feltételes inputkeresleti függvények is szeparábilisak az outputban és az inputárakban, azaz felírhatók a következő alakban:

$$z(w,y) \equiv \gamma(y)\, z(w,1),$$

ahol $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ szigorúan monoton nő, és $z(w,1)$ az egységnyi termelés költségminimalizáló inputvektora.

[13] Emlékeztetőül: egy $f : \Re^N_+ \to \Re$ függvény szigorúan kvázikonkáv, ha

$$f(z) \geqq f(z'),\ z \neq z',\ \text{és } \lambda \in (0,1) \Rightarrow f(\lambda z + (1-\lambda) z') > z'.$$

Bizonyítás: Miután f homotetikus, felírható az $f(z) = g(h(z))$ alakban, ahol $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ szigorúan monoton növekvő, és $h : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ első fokon homogén függvény. Az egyszerűség kedéért tegyük fel, hogy f képe az egész $\mathbb{R}_+$. Könnyű belátni,[14] hogy ekkor minden $y > 0$ esetén $g^{-1}(y) > 0$. Legyen ezután egy tetszőleges $y > 0$ értékre

$$t = \frac{g^{-1}(1)}{g^{-1}(y)} > 0.$$

Vegyük észre, hogy igazak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} g(h(z)) \geqq y &\iff h(z) \geqq g^{-1}(y); \\ h(z) \geqq g^{-1}(y) &\iff h(tz) \geqq tg^{-1}(y) = g^{-1}(1); \\ h(tz) \geqq g^{-1}(1) &\iff g(h(tz)) \geqq 1, \end{aligned}$$

azaz

$$g(h(z)) \geqq y \iff g(h(tz)) \geqq 1.$$

Ezt felhasználva a (KMF) a

$$\min_{z \in \mathbb{R}_+^N} wz \tag{5.B–6}$$

$$g(h(tz)) \geqq 1 \tag{5.B–7}$$

alakba írható. A (5.B–6) célfüggvényt átalakítjuk:

$$\min_{z \in \mathbb{R}_+^N} wz = \frac{1}{t} \min_{z \in \mathbb{R}_+^N} w(tz),$$

és elvégezzük a

$$(tz) \triangleq \tilde{z}$$

helyettesítést. Ekkor a feladatunk végső

$$\frac{g^{-1}(y)}{g^{-1}(1)} \min_{\tilde{z} \in \mathbb{R}_+^N} w\tilde{z}$$

$$g(h(\tilde{z})) \geqq 1$$

formáját kapjuk, amit összevetve a költségminimalizálási feladat első alakjával a

$$c(w, y) = \frac{g^{-1}(y)}{g^{-1}(1)} c(1, w)$$

következtetésre juthatunk. Miután a g függvény szigorúan monoton nő, a g^{-1} inverze nemkülönben, és így a

$$\gamma(y) = \frac{g^{-1}(y)}{g^{-1}(1)}$$

[14] Tegyük is meg ezt!

függvény is minden $y > 0$ érték esetén. Az h függvény lineáris homogenitása miatt $h(0) = 0$, és $c(0, w) = 0$, hiszen $f(0) = 0$ szükségképpen, tehát az állítás az $y = 0$ érték mellett is igaz.

Az inputkeresleti függvények szeparábilitásának bizonyításához először vegyük észre, hogy a termelési függvény szigorú kvázikonkavitása miatt minden $y \in Y^+$ értékre a $Z(y)$ inputigényhalmaz szigorúan konvex. Ezért a 5.B.1. Tétel (xi)-(xii) pontja és a *Shepard*-lemma miatt azonnal kapjuk az állítást. □

□ □ □

5.B.4. Feladat. *Legyen az* $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ *termelési függvény szigorúan kvázikonkáv és* $k > 0$*-ad fokon homogén! Bizonyítsuk be, hogy ekkor a technológiához tartozó költségfüggvény és a feltételes inputkeresleti függvények felírhatók a következő alakban:*

$$\begin{aligned} c(w, y) &= y^{\frac{1}{k}} c(w, 1); \\ z(w, y) &= y^{\frac{1}{k}} z(w, 1)! \end{aligned}$$

□ □ □

□ □ □

5.B.5. Feladat. *Legyen az* $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ *termelési függvény konkáv. Lássuk be, hogy ekkor a* $c(w, y)$ *költségfüggvény konvex* y*-ban!*

□ □ □

6. fejezet

Aggregáció a termelésben

Tegyük fel, hogy szemben az eddigiekkel nem csak egy termelőt vizsgálunk, hanem véges sokat. A termelőket a j szimbólummal indexeljük, $j = 1, \ldots, J$. Minden Y_j termelési halmaz legyen nemüres, zárt és, és teljesüljön rá a díjmentes lomtalanítás feltétele. Legyenek a megfelelő profitfüggvények $\pi_j(p)$ és a kínálati leképezések $y_j(p)$

A fő kérdésünk most az, hogy vajon létezhet-e egy olyan termelő, aki mindenben úgy viselkedik, mint egy közönséges termelő, de technológiája az egyéni technológiák egyfajta aggregációja. A válasz igen.

Tekintsünk egy olyan aggregált Y technológiát, ami az egyéni technológiák direkt összege:

$$Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \middle| y = \sum_{j=1}^{J} y_j, \text{ valamely } y_j \in Y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J \right\}.$$

Ez a technológia nyilván nemüres, zárt és díjmentes benne a lomtalanítás. Tekintsük most csak azokat az árvektorokat, amelyek mellett az összes termelőnek létezett a profitfüggvénye. Az egyszerűség kedvéért most is tegyük fel, hogy ezek halmaza a pozitív árak halmaza. Ezek mellett ennek az aggregált termelőnek is létezik mind a $\pi^*(p)$ profitfüggvénye, mind az $y^*(p)$ kínálati leképezése. Most belátjuk, hogy az aggregált termelő pont úgy viselkedik, mintha ő koordinálná a profitmaximalizáló egyéni termelőket.

6..6. Tétel. *$\forall p > 0$ árrendszerre*

(i) $\pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$;

(ii) $y^*(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$, azaz $y^*(p) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} y_j \,|y_j \in y_j(p), \quad \forall j - re \right\}$.

Bizonyítás: (i) Mindegyik egyéni technológiából válasszunk egy tetszőleges y_j termelési tevékenységet, ezekre $\sum_{j=1}^{J} y_j \in Y$. A profitfüggvény definíciójából

$$\sum_{j=1}^{J} py_j = p\sum_{j=1}^{J} y_j \leqq \pi^*(p),$$

amiből, mivel a kiválasztott tevékenységek tetszőlegesek voltak

$$\sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) \leqq \pi^*(p).$$

Az ellenkező irányú reláció bizonyításához tegyük fel, hogy $y \in Y$ egy tetszőleges aggregált tevékenység. Emiatt szükségképpen léteznek olyan $y_j \in Y_j$, $j = 1, 2, \ldots, J$ termelési vektorok, amelyekre $\sum_{j=1}^{J} y_j = y$. Ebből

$$py = p\sum_{j=1}^{J} y_j = \sum_{j=1}^{J} py_j \leqq \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) \quad \forall y \in Y\text{-ra},$$

azaz

$$\pi^*(p) \leqq \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p).$$

(ii) Foglalkozzunk először a $\sum_{j=1}^{J} y_j(p) \subseteq y^*(p)$ tartalmazással. Mindegyik $y_j(p)$ halmazból válasszunk egy tetszőleges y_j termelési tevékenységet. Ekkor

$$p\sum_{j=1}^{J} y_j = \sum_{j=1}^{J} py_j = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) = \pi^*(p),$$

ahol az utolsó egyenlőséget az (i) pontban bizonyítottuk. Így $\sum_{j=1}^{J} y_j \in y^*(p)$ és mivel mindegyik y_j tetszőleges eleme volt a megfelelő $y_j(p)$ halmaznak, ezért

$$\sum_{j=1}^{J} y_j(p) \subseteq y^*(p).$$

Tekintsünk most egy tetszőleges $y \in y^*(p)$ tevékenységet. Ekkor $y = \sum_{j=1}^{J} y_j$ valamely $y_j \in Y_j$-ra. Mivel

$$p\sum_{j=1}^{J} y_j = \pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$$

és tudjuk, hogy $\forall j$-re $py_j \leqq \pi_j(p)$, ezért ezekben a legutolsó egyenlőtlenségekben mindegyik csak egyenlőségre teljesülhet.

Ezek szerint

$$y_j \in y_j(p), \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

így

$$y \in \sum_{j=1}^{J} y_j(p),$$

azaz

$$y^*(p) \subseteq \sum_{j=1}^{J} y_j(p).$$

□

Ez egy fontos decentralizációs eredmény, ahhoz, hogy az aggregált profitot maximalizáljuk, nem kell mást tennünk, mint hagyni minden termelőt, hadd maximalizálja saját maga a profitját.

II. rész

A fogyasztó elmélete

7. fejezet

A fogyasztó döntése

7.A. Néhány alapfogalom és feltevés

Modellünk alapvető fogalma itt is a *jószág*. A jószágokat egymástól fizikai tulajdonságaik alapján különböztetjük meg. Az egyes jószágokat természetes mértékegységekkel látjuk el, feltételezzük azt, hogy bármelyik jószágból tetszőleges kis mennyiség is értelmezhető, azaz a jószágok rendelkeznek majd a folytonos oszthatóság tulajdonságával, valamint azt, hogy tetszőleges jószágmennyiséget meg tudunk mérni. Egy jószág egységeit egymástól megkülönböztetni természtesen nem tudjuk, azaz a jószágok homogének. Feltesszük, hogy a gazdaságban véges sok jószág van, és rendelkezésünkre áll ezek listája és így egyértelmű sorrendjük. E sorrend szerint indexeljük a jószágokat, az indexváltozó n lesz. A jószágok (véges) száma N.

A következő fogalom a ***jószágkosár***. A jószágkosár egy olyan N elemű lista, ami megmondja nekünk, hogy az egyes jószágokból mekkora mennyiségről "van szó". A jószágkosárnak, mint listának az elemei valós számok, előjelük pozitív, ha a jószág (fogyasztásra) rendelkezésre áll, negatív, ha a jószágot a fogyasztásból kivonjuk. Egy jószágkosarat ezek szerint megfeleltethetünk az N dimenziós euklideszi tér egy pontjának, és emiatt az $\mathbb{R}^N$ teret *jószágtér*nek hívjuk.

A fogyasztó a javakat végső soron szolgáltatja a gazdaság számára, vagy kivonja azokat a gazdaságból. A fogyasztókat i-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{F}$, e halmaz számossága I. Egyelőre csak egy fogyasztót vizsgálunk, azaz $I = 1$ lesz mindaddig, amíg rá nem térünk az interakciók vizsgálatára is.

A fogyasztót jellemzi az $X \subset \mathbb{R}^N$ fogyasztási halmaz, amelynek elemei az x-szel jelölt fogyasztási vektorok. A fogyasztási vektor n-edik komponense nyilván pozitív, ha fogyasztó azt a jószágot végsősoron (nettó módon) fogyasztja, negatív, ha szolgáltatja.

7.A.1. Feltevés. *Az X fogyasztási halmaz az $\mathbb{R}^N$ zárt, alulról korlátos, és konvex részhalmaza.*

A három tulajdonság közül csak a második igényel némi magyarázatot: ez azt jelenti, hogy a fogyasztó minden jószágból vagy legalább egy minimális (nemnegatív) mennyiséget fogyaszt, vagy legfeljebb egy maximális (nemnegatív) mennyiséget szolgáltat. Másnéven ez egy létfenntartási feltétel. A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – a következő feltevéssel élünk:

7.A.2. Feltevés. *A fogyasztási halmaz a nemnegatív ortháns:* $X = \mathbb{R}^N$.

A fogyasztóról – ugyanúgy, mint a termelőről – felteszünk egy magatartásbeli feltevést:

7.A.3. Feltevés. *A fogyasztóról feltesszük, hogy a maga piaci erejét abszolút jelentéktelennek tekinti, úgy véli, hogy az adott, nem általa meghatározott piaci árakat megváltoztatni nem képes, ezért nem áldoz erőforrást, időt, pénzt arra, nem tesz stratégiai lépéseket annak érdekében, hogy kisérletet tegyen e változtatásra. Úgy véli továbbá, hogy ezek mellett az árak mellett annyi jószágegységet vásárol, amennyit csak akar. Ekkor az egyedi keresleti függvénye a szóban forgó árak által adott értékeken vízszintes. Összefoglalva: a fogyasztó* árelfogadó.

A fogyasztó alapmodellje általában él a következő megkötéssel:

7.A.4. Feltevés. *A jószágok árai és a fogyasztó jövedelme pozitív, azaz* $p > 0$, *illetve* $w > 0$.

7.B. Költségvetés és kereslet

A fogyasztó döntése két pilléren nyugszik: lehetőségein és céljain. A szokásos modell a fogyasztó lehetőségeit a költségvetésében foglalja össze.

7.B.1. Definíció. *A fogyasztó* $B : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^N_+$ walrasi költségvetési leképezése *egy pont–halmaz leképezés: adott* $p > 0$ *árak és* $w > 0$ *jövedelem mellett a fogyasztó költségvetési halmaza:*

$$B\left(p, w\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ \left| px \leqq w \right.\right\}.$$

□ □ □

7.B.2. Feladat. *Lássuk be, hogy minden* $(p, w) > 0$ *párra a* $B\left(p, w\right)$ *költségvetési halmaz nemüres, zárt, korlátos és konvex, és azt, hogy a* $B\left(\cdot, \cdot\right)$ *leképezés 0-ad fokon homogén!*

□ □ □

Érdemes néhány szót szólni a geometriai interpretációról. A költségvetési halmaz nem más, mint az $\mathbb{R}^N_+$ nemnegatív orthans és a $px \leqq w$ képlettel adott féltér metszete. A félteret határoló $px = w$ hipersík, más néven a *költségvetési egyenes*, normálisa az árvektor.

7.B.3. Definíció. *A fogyasztó* $x : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^N_{+}$ walrasi *keresleti leképezése egy pont–halmaz leképezés: adott* $p > 0$ *árak és* $w > 0$ *jövedelem mellett a fogyasztó* $x(p,w)$ *kereslete egy* $B(p,w)$ *halmazbeli halmaz. Ha ez a halmaz minden* (p,w) *párra egyelemű, akkor keresleti függvényről beszélünk.*

7.B.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a fogyasztó kereslete a korábban tárgyalt egyéni döntési modell speciális esete, ahol az* X *alternatívahalmaz a fogyasztási halmaz, a* $\mathcal{B}^{\mathcal{W}}$ *halmazcsalád a* $(p,w) > 0$ *párok melletti költségvetési halmazok családja és a* $\left(\mathcal{B}^{\mathcal{W}}, C(\cdot)\right)$ *döntési szerkezethez tartozó* $C(\cdot)$ *döntési szabály az* $x(p,w)$ *keresleti leképezés. Ebből az is következik, hogy ebben a fejezetben a fogyasztói döntés nem a preferenciákból származtatott, hanem primitív kategória, mintha megfigyelésekből kapnánk. Emiatt a következő két tulajdonságot sem tudjuk levezetni semmiből, hanem alkalmasint feltételeznünk kell. A másik észrevételünk azonban arra mutat rá, hogy vigyáznunk kell a preferenciákból származtatott és az ezen a módon megadott keresleti viselkedés összevetésekor, a* $\mathcal{B}^{\mathcal{W}}$ *halmazcsalád ugyanis nem tartalmazza az összes legfeljebb három elemű részhalmazt.*

7.B.5. Definíció. *Az* $x(p,w)$ walrasi *keresleti leképezés 0-ad fokon homogén, ha tetszőleges pozitív* (p,w) *pár és pozitív* λ *skalár esetén*

$$x(\lambda p, \lambda w) = x(p,w).$$

Az $x(p,w)$ walrasi *keresleti leképezés kielégíti a* Walras-törvényt, *ha tetszőleges pozitív* (p,w) *pár esetén*

$$px = w \quad \forall x \in x(p,w)\text{-re.}$$

7.B.1. A keresleti függvény és komparatív statika

Különleges figyelmet érdemel az a klasszikus eset, amikor az $x(p,w)$ *walrasi* keresleti leképezés differenciálható függvény. Ekkor a jövedelemnek az N darab $x_n(p,w)$ keresleti függvényre gyakorolt

$$\frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w}$$

differenciális hatását *jövedelmi hatás*nak, míg az

$$\frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'},}, \ n = 1,\ldots,N, \ n' = 1,\ldots,N$$

parciális deriváltakat az n'-edik jószág árának a fogyasztó n-edik jószág iránti keresletére gyakorolt (teljes) *árhatás*ának hívjuk.

Hasonlóképpen definiáljuk az

$$\varepsilon_{n,n'}(p,w) \triangleq \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'},} \cdot \frac{p_{n'}}{x_n(p,w)}, \ n = 1,\ldots,N, \ n' = 1,\ldots,N$$

árrugalmasságokat, valamint az

$$\eta_{n,w}(p,w) \triangleq \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} \cdot \frac{w}{x_n(p,w)}, \quad n = 1, \ldots, N$$

jövedelemrugalmasságokat.

Ezeknek a rugalmasságoknak a későbbiekben komoly szerepük 1esz, főleg empirikus vizsgálatokban.

□ □ □

7.B.6. Feladat. *Definiáljuk a korábbról már ismert fogalmakat: a fogyasztónak egy adott jószágra vonatkozó* Engel-görbé*jét, a jövedelem–ajánlati görbét, a normál, illetve az inferior jószágokat, az ár–ajánlati görbét, a közönséges és a* Giffen–*jószágokat!*

□ □ □

Ha a fogyasztó keresleti függvényéről feltételezzük a korábban már említett tulajdonságokat, akkor az ár- és jövedelemi hatások között érdekes összefüggéseket állapíthatunk meg. Hangsúlyozni kell e helyütt is, hogy ezek a tulajdonságok csak a homogenitásból és a *Walras*-törvényből erednek, semmi közük a haszonmaximalizáláshoz.

7.B.7. Segédtétel. *Ha az $x(p,w)$ folytonosan differenciálható* walrasi *keresleti függvény 0-ad fokon homogén, akkor minden pozitív (p,w) pár esetén*

$$\sum_{n'=1}^{N} \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'}} p_{n'} + \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} w = 0, \quad n = 1, \ldots, N\text{-re}, \tag{7.B–1}$$

vagy átírva mátrixaritmetikai formába:

$$D_p x(p,w)\,p + D_w x(p,w)\,w = 0.$$

Bizonyítás: A homogén függvényekre vonatkozó *Euler-tétel*ből azonnal adódik.□

A következő két eredményhez elég a *Walras-törvény*t előbb az árak, majd a jövedelem szerint differenciálnunk.

7.B.8. Segédtétel (Cournot-aggregáció). *Ha az $x(p,w)$ folytonosan differenciálható* walrasi *keresleti függvény kielégíti a* Walras-törvényt, *akkor minden pozitív (p,w) pár esetén*

$$\sum_{n=1}^{N} p_n \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'}} + x_{n'}(p,w) = 0 \quad n' = 1, \ldots, N\text{-re}, \tag{7.B–2}$$

vagy átírva mátrixaritmetikai formába:

$$pD_p x(p,w) + x(p,w)^T = 0^T.$$

7.B.9. Segédtétel (Engel-aggregáció). *Ha az $x(p,w)$ folytonosan differenciálható* walrasi *keresleti függvény kielégíti* a Walras-törvényt, *akkor minden pozitív (p,w) pár esetén*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} p_n \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} &= 1, \quad \text{vagy} \\ pD_w x(p,w) &= 1. \end{aligned} \tag{7.B–3}$$

□ □ □

7.B.10. Feladat. *Legyen*

$$\sigma_n(p,w) \triangleq \frac{p_n x_n(p,w)}{\sum_{n=1}^{N} p_n x_n(p,w)}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

az n-edik jószág költségvetési hányada. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n'=1}^{N} \varepsilon_{n,n'}(p,w) + \eta_{n,w}(p,w) = 0, \quad n = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma_n(p,w)\,\varepsilon_{n,n'}(p,w) + \sigma_{n'}(p,w) = 0, \quad n' = 1, \ldots, N,$$

valamint

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma_n(p,w)\,\eta_{n,w}(p,w) = 1.$$

□ □ □

7.C. A gyenge axióma és a kompenzált kereslet törvénye

Az elemzés során továbbra is feltesszük, hogy a fogyasztó *walras*i keresleti leképezése *reguláris.*

7.C.1. Definíció. *Ha a fogyasztó* walrasi *keresleti leképezése* a Walras-*törvényt kielégítő, 0-ad fokon homogén* függvény, *akkor* regulárisnak *mondjuk.*

A gyenge axióma konzisztenciateszt, a fogyasztó választásának önellentmondásmentessége nem állhat fenn, ha kereslete megsérti a gyenge axióma erre az esetre a következő definícióban átfogalmazott alakját.

7.C.2. Definíció. *A fogyasztó* $x(p,w)$ walras*i keresleti függvénye kielégíti* a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját *(a WARP-ot), ha*

tetszőleges két (p,w) és (p',w') ár–jövedelem párra:

$$[[px(p',w') \leqq w] \wedge [x(p',w') \neq x(p,w)]] \Rightarrow [p'x(p,w) > w'] .$$

A következő fogalom, amely az esetlegesen fellépő árváltozások helyettesítési és jövedelmi hatásainak szétválasztására szolgál, alapvető jelentőségű lesz a továbbiakban.

7.C.3. Definíció. *Ha az* $x(p,w)$ *kereslet mellett egy* $\Delta p = (p'-p)$ *árváltozás olyan*

$$\Delta w = w' - w$$

jövedelemváltozással társul, amire $p'x(p,w) = w'$, *akkor ezt* (Slutsky-)kompenzált árváltozás*nak hívjuk. A* Slutsky-kompenzáció *nagysága nyilván*

$$\Delta w = \Delta p x(p,w) . \tag{7.C–1}$$

7.C.4. Segédtétel. *Egy* $x(p,w)$ *reguláris keresleti függvény akkor és csak akkor elégíti ki a WARP-ot, ha minden* kompenzált *árváltozásra kielégíti.*

Bizonyítás: A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyítását indirekt módon végezzük. Feltesszük, hogy léteznek olyan (p',w') és (p'',w'') ár–jövedelem párok, amelyekre $x(p',w') \neq x(p'',w'')$ és

$$p'x(p'',w'') \leqq w' \quad \text{és} \quad p''x(p',w') \leqq w''. \tag{7.C–2}$$

Ha ezek közül az egyenlőtlenségek közül az egyik egyenlőségre teljesül, akkor a megfelelő árváltozás kompenzált, és emiatt ellentmondásba kerültünk azzal a feltevésünkkel, hogy az $x(p,w)$ reguláris keresleti függvény minden *kompenzált* árváltozásra kielégíti a gyenge axiómát.

Éppen ezért tegyük most fel, hogy mind a két egyenlőtlenség valóban egyenlőtlenségre teljesül! Ekkor létezik olyan $\lambda \in (0,1)$ skalár, amire[1]

$$(\lambda p' + (1-\lambda)p'')x(p',w') = (\lambda p' + (1-\lambda)p'')x(p'',w'') .$$

Legyen $p = \lambda p' + (1-\lambda)p''$ és $w = px(p',w')$. Ekkor

$$\lambda w' + (1-\lambda)w'' > \lambda p'x(p',w') + (1-\lambda)p''x(p',w') = w =$$
$$= px(p,w) = \lambda p'x(p,w) + (1-\lambda)p''x(p,w) ,$$

[1] Lássuk be, hogy erre a keresett értékre

$$0 < \lambda = \frac{p''(x(p'',w'') - x(p',w'))}{(p''-p')(x(p'',w'') - x(p',w'))} < 1!$$

ahol az egyenlőtlenség a (7.C–2)-re tett feltevésünkből, a második egyenlőség pedig a regularitásból következik. Emiatt vagy $p'x(p,w) < w'$, vagy $p''x(p,w) < w''$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az első egyenlőtlenség áll fenn. (A másik esetében a gondolatmenet hasonló.) Ekkor $x(p,w) \neq x(p',w')$, de $px(p',w') = w$ és $p'x(p,w) < w'$, ami a gyenge axióma megsértését jelenti kompenzált árváltozás mellett, vagyis ismét ellentmondásra jutottunk.

□

A következő tétel a gyenge axiómát kielégítő keresleti függvényekre ad teljes karakterizációt.

7.C.5. Tétel. *Egy $x(p,w)$ reguláris keresleti függvény akkor és csak akkor elégíti ki a WARP-ot, ha tetszőleges, egy (p,w) ár–jövedelem párból induló és a $(p',w') = (p', p'x(p,w))$ ár–jövedelem párba irányuló kompenzált árváltozásra igaz, hogy*

$$(p'-p)\left[x(p',w') - x(p,w)\right] \leqq 0, \tag{7.C–3}$$

valamint az egyenlőtlenség szigorú, ha $x(p',w') \neq x(p,w)$.

Bizonyítás:

Először a szükségességet látjuk be. Ha $x(p',w') = x(p,w)$, akkor nyilván készen vagyunk. Tegyük most fel, hogy nem áll fenn ez az egyenlőség! A (7.C–3) egyenlőtlenség átírható a

$$p'\left[x(p',w') - x(p,w)\right] - p\left[x(p',w') - x(p,w)\right] \leqq 0$$

alakba. A *Walras*–törvény miatt $p'x(p',w') = w'$. Mivel kompenzált árváltozást tekintettünk, ezért $p'x(p,w) = w'$, azaz az első tag zérus. A kompenzáció miatt tehát $x(p,w)$ megfizethető a (p',w') pár mellett, így a feltételezett gyenge axiómából az következik, hogy $px(p',w') > w = px(p,w)$, azaz a második tag pozitív.

Most lássuk be az elégségességet is. Indirekt utat követünk, feltesszük, hogy a gyenge axióma nem teljesül. Ekkor a 7.C.4. Segédtétel értelmében létezik olyan a (p,w) párból a (p',w') párba irányuló kompenzált árváltozás, amire $x(p',w') \neq x(p,w)$, $px(p',w') \leqq w$ és $p'x(p,w) = w'$. Miután azonban a keresleti függvény kielégíti a *Walras*–törvényt, e két reláció a

$$\begin{aligned} p\left[x(p',w') - x(p,w)\right] &\leqq 0 \\ p'\left[x(p',w') - x(p,w)\right] &= 0 \end{aligned}$$

összefüggéseket adja, és ezek ellentmondásban vannak a (7.C–3) egyenlőtlenséggel, ha

$$x(p',w') \neq x(p,w).$$

□

7.C.6. Megjegyzés. *Ha a tételben szereplő egyenlőtlenséget a*

$$\Delta p \Delta x \leqq 0$$

kompaktabb formába írjuk, ahol $\Delta x = x(p', w') - x(p, w)$, *akkor láthatjuk, hogy egy* $x(p, w)$ *reguláris keresleti függvény akkor és csak akkor elégíti ki a WARP-ot, ha a "kereslet ellentétesen mozog az árral", amennyiben az árváltozás kompenzált. Ezt a tulajdonságot a* kompenzált kereslet törvény*ének hívjuk.*

7.C.1. A helyettesítési (Slutsky-)mátrix

Ha a reguláris $x(p, w)$ keresleti függvényről a minden változójában való folytonos differenciálhatóságot is feltesszük, akkor a kompenzált kereslet törvényének egy új, érdekes és a későbbiekben nagyon fontos alakját nyerjük. Induljunk megint a (p, w) ár–jövedelem párból és a differenciális árváltozást jelölje a dp vektor! Az ehhez tartozó kompenzáció nyilván

$$dw = dpx(p, w) = x(p, w)^T dp.$$

A kompenzált kereslet törvényének differenciális változásokra átfogalmazott alakja:

$$dpdx \leqq 0. \tag{7.C–4}$$

Tekintsük most a dx differenciált, azaz azt a keresletváltozást, amit ez a dp árváltozás okoz. Azt kapjuk, hogy $n = 1, \ldots, N$-re

$$dx_n(p, w) = \sum_{n'=1}^{N} \frac{\partial x_n(p, w)}{\partial p_{n'}} dp_{n'} + \frac{\partial x_n(p, w)}{\partial w} dw.$$

Figyelembe véve, hogy $dw = x(p, w)^T dp$, kapjuk a következőt: $n = 1, \ldots, N$-re

$$\begin{aligned} dx_n(p, w) &= \sum_{n'=1}^{N} \frac{\partial x_n(p, w)}{\partial p_{n'}} dp_{n'} + \frac{\partial x_n(p, w)}{\partial w} \sum_{n'=1}^{N} x_{n'}(p, w) dp_{n'} = \\ &= \sum_{n'=1}^{N} \left[\frac{\partial x_n(p, w)}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p, w)}{\partial w} x_{n'}(p, w) \right] dp_{n'}. \end{aligned}$$

Érdemes ezt átírni mátrixaritmetikai formába:

$$dx = S(p, w) dp, \tag{7.C–5}$$

ahol $n = 1, \ldots, N$-re és $n' = 1, \ldots, N$-re

$$[s_{n,n'}] = \left[\frac{\partial x_n(p, w)}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p, w)}{\partial w} x_{n'}(p, w) \right],$$

azaz

$$S(p,w) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w)\, x(p,w)^T =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w} x_1(p,w) & \cdots & \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_N} + \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w} x_N(p,w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N(p,w)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_N(p,w)}{\partial w} x_1(p,w) & \cdots & \frac{\partial x_N(p,w)}{\partial p_N} + \frac{\partial x_N(p,w)}{\partial w} x_N(p,w) \end{bmatrix}.$$

Ezt a mátrixot *helyettesítési* vagy *Slutsky-mátrix*nak hívjuk, elemeit helyettesítési hatásnak, mert a kompenzált árváltozásnak a keresletre gyakorolt hatását adják. (A kompenzáció miatt jövedelmi hatásról nem beszélhetünk.) Ha a (7.C–5) összefüggést behelyettesítjük a kompenzált kereslet törvényét leíró (7.C–4) egyenlőtlenségbe, akkor látjuk, hogy

$$dpS(p,w)\,dp \leqq 0.$$

Ezt megfogalmazhatjuk úgy is, hogy

7.C.7. Tétel. *Egy, a WARP-ot kielégítő $x(p,w)$ reguláris keresleti függvény tetszőleges (p,w) pár melletti $S(p,w)$ helyettesítési mátrixa negatív szemidefinit.*

Ebből a tételből azonnal nyerhetjük a fogyasztó egy jószág iránti keresletére vonatkozó ismert állításainkat.

□ □ □

7.C.8. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy jószág árának megváltozásához tartozó helyettesítési hatás mindig nempozitív. Ezenkívül lássuk be, hogy egy* Giffen-*jószág csak inferior lehet.*

□ □ □

Ehhez az eredményhez néhány megjegyzést kell fűznünk. Az első arra vonatkozik, hogy a szemidefinitség nem erősíthető tovább. Ugyanis

7.C.9. Tétel. *Egy folytonosan differenciálható, reguláris $x(p,w)$ keresleti függvényre tetszőleges (p,w) pár esetén*

$$\begin{aligned} S(p,w)\,p &= 0, \\ pS(p,w) &= 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Az (7.B–1) – (7.B–3) összefüggésekből azonnal adódik. □

Másodszor: noha a gyenge axióma implikálja a helyettesítési mátrix szemidefinitségét, ez visszafelé nem feltétlenül igaz. Tudunk mutatni olyan reguláris keresleti függvényt, amihez tartozó helyettesítési mátrix negatív szemidefinit, de a kereslet megsérti a gyenge axiómát. Szerencsére a helyettesítési mátrix negatív szemidefinitsége *majdnem* implikálja a gyenge axiómát. Egy reguláris keresleti függvény esetén a WARP teljesüléséhez elégséges feltétel:[2]

$$tS(p, w)\, t < 0, \quad \forall t \neq \lambda p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Végül, de korántsem utolsó sorban, a későbbiek számára talán a legfontosabb megjegyzés: a regularitás és a gyenge axióma nem implikálja a *Slutsky*-mátrix *szimmetricitásá*t, ha $N > 2$. Ha azonban $N = 2$, akkor a helyzet alapvetően megváltozik, a *Slutsky*-mátrix szimmetrikus lesz.

□ □ □

7.C.10. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy differenciálható $x(p, w)$ reguláris keresleti függvény* Slutsky-*mátrixa $N = 2$ esetén szimmetrikus!*

□ □ □

A szimmetricitás hiánya – noha ez az eddig elmondottakból még nem látszik – komoly problémára utal: a fogyasztói döntés két modellje, nevezetesen a megfigyelt választásokra alapozott keresleti magatartásból induló, valamint a haszonmaximalizálásra épülő, nem ekvivalens. Megmutatható ugyanis, hogy léteznek a regularitási tulajdonságokat és a gyenge axiómát kielégítő olyan keresleti adatok, amelyek nem racionalizálhatók, azaz nem származhatnak haszonmaximalizálásból.

□ □ □

7.C.11. Feladat (Hicks). *Legyen egy fogyasztó megfigyelt jövedelme mind a három megfigyelés során $w = 8$. Az árvektorok legyenek*

$$p^1 = (2, 1, 2), p^2 = (2, 2, 1), p^3 = (1, 2, 2),$$

és tegyük fel, hogy a fogyasztó három megfigyelt döntése:

$$x^1 = (1, 2, 2), x^2 = (2, 1, 2), valamint x^3 = (2, 2, 1)!$$

Mutassuk meg, hogy ezek az adatok nem mondanak ellent a gyenge axiómának és mégsem racionalizálhatók!

□ □ □

[2]Ezt az állítást most nem bizonyítjuk.

8. fejezet

A (neo)klasszikus keresletelmélet alapjai (I)

8.A. Preferenciarendezések néhány tulajdonsága

Korábban definiáltuk már egy döntéshozó (fogyasztó) preferenciarendezésének fogalmát, annak bizonyos tulajdonságait. Tudjuk, mit jelent egy hasznossági függvénnyel való reprezentálhatóság és azt is láttuk, hogy csak olyan preferenciarendezést reprezentálhatunk hasznossági függvénnyel, ami racionális. Most ezen az úton haladunk tovább, felépítjük a neoklasszikus keresletelmélet preferenciarendezésen alapuló modelljét, elsősorban a hasznossági függvény segítségével. Nem törekszünk arra, hogy a lehető legáltalánosabban tárgyaljuk a problémát, a leggyakrabban használt és elemzett modellkeretet alkalmazzuk. Az eddigiekhez hasonlóan feltesszük a következőket:

8.A.1. Feltevés. *A fogyasztó fogyasztási halmaza a nemnegatív ortháns, azaz $X = \Re^N_+$, és létezik egy ezen a halmazon értelmezett $\succsim$ racionális (azaz teljes és tranzitív) preferenciarendezése.*

8.A.2. Definíció. *Legyen $x^0 \in X$! Ekkor a fogyasztó* „nem rosszabb, mint x^0”, *másképpen* gyengén prefereált halmaza az x^0 pontban*:*

$$\succsim (x^0) \triangleq \left\{ x \in X \,\middle|\, x \succsim x^0 \right\};$$

a fogyasztó „jobb, mint x^0”, *másképpen* erősen preferált halmaza az x^0 pontban*:*

$$\succ (x^0) \triangleq \left\{ x \in X \,\middle|\, x \succ x^0 \right\};$$

a fogyasztó közömbösségi halmaza az x^0 pontban*:*

$$\sim (x^0) \triangleq \left\{ x \in X \,\middle|\, x \sim x^0 \right\}.$$

Ez utóbbit az x^0 ponton áthaladó közömbösségi görbének *is hívjuk.*

□ □ □

8.A.3. Feladat. *Definiáljuk értelemszerűen a gyengén, illetve erősen diszpreferált (kevésbé preferált) halmazokat!*

□ □ □

A következőkben definiáljuk azokat a tulajdonságokat, amelyeket használni fogunk.

8.A.4. Definíció. (Monotonitás) *A fogyasztó* $\succsim$ *preferenciarendezése* gyengén monoton, *ha*

$$\left[x^1, x^2 \in X \text{ és } x^1 \geqq x^2\right] \Longrightarrow x^1 \succsim x^2;$$

a fogyasztó $\succsim$ *preferenciarendezése* monoton, *ha gyengén monoton és*

$$\left[x^1, x^2 \in X \text{ és } x^1 > x^2\right] \Longrightarrow x^1 \succ x^2;$$

a fogyasztó $\succsim$ *preferenciarendezése* erősen monoton, *ha*

$$\left[x^1, x^2 \in X \text{ és } x^1 \geqq (\neq)\, x^2\right] \Longrightarrow x^1 \succ x^2;$$

a fogyasztó globálisan telhetetlen, *ha*

$$\forall x \in X\text{-re} \quad \exists x' \in X, \text{ amire } x' \succ x;$$

a fogyasztó lokálisan telhetetlen, *ha*

$$\forall x \in X\text{-re és } \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists x' \in X \cap \mathcal{N}(x, \varepsilon), \text{ amire } x' \succ x.$$

□ □ □

8.A.5. Feladat. *Vizsgáljuk meg, mi a kapcsolat e monotonitási fogalmak között!*

□ □ □

8.A.6. Definíció. (Konvexitás) *A fogyasztó* $\succsim$ *preferenciarendezése* gyengén konvex, *ha a „nem rosszabb, mint" halmazok*[3] *konvexek:*

$$\left[x^1, x^2 \in X,\ \lambda \in (0,1) \text{ és } x^1 \succsim x^2\right] \Longrightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2 \succsim x^2;$$

a fogyasztó $\succsim$ *preferenciarendezése* konvex, *ha gyengén konvex és*

$$\left[x^1, x^2 \in X,\ \lambda \in (0,1) \text{ és } x^1 \succ x^2\right] \Longrightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2 \succ x^2;$$

a fogyasztó $\succsim$ *preferenciarendezése* szigorúan konvex, *ha*

$$\left[x^1, x^2 \in X,\ x^1 \neq x^2,\ \lambda \in (0,1) \text{ és } x^1 \succsim x^2\right] \Longrightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2 \succ x^2.$$

[3] Azaz a felső nivó halmazok.

A konvexitások mindegyike a *helyettesítési határarány* csökkenését is maga után vonja. Ez a helyettesítési határarány a megfelelő közömbösségi görbe meredekségének abszolút értéke, az a szubjektív cserearány, ami szerint a fogyasztó az egyik termék egy végtelen kicsi egységét a másikkal helyettesíteni hajlandó.

8.A.7. Definíció. *Az $x \in X$ pontban a fogyasztó helyettesítési határaránya $1 \leqq l, k \leqq N$ esetén*

$$MRS_{l,k}(x) \triangleq \lim_{\Delta x_l \to 0} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta x_l} \right|,$$

ahol $(x_1, \ldots, x_l + \Delta x_l, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_N) \in I(x)$, és a határérték létezik.

8.B. Preferenciarendezés reprezentálhatósága

A racionális $\succsim$ preferenciarendezésre akkor mondjuk, hogy *jól viselkedik*, ha monoton és konvex, és akkor mondjuk, hogy *nagyon jól viselkedik*, ha erősen monoton és szigorúan konvex. Vajon e „jól viselkedő” jelzőnek van-e ahhoz köze, hogy egy racionális preferenciarendezés reprezentálható-e hasznossági függvénnyel? Sajnos nincs, mint ezt a következő példa is mutatja.

8.B.1. Példa. (Lexikografikus preferenciák) *Az egyszerűség kedvéért legyen $N = 2$. Legyen a $\succsim_L$preferenciarendezés a következő:*

$$x^1 \succsim_L x^2, \text{ ha vagy } x_1^1 > x_1^2, \text{ vagy } x_1^1 = x_1^2 \text{ és } x_2^1 > x_2^2.$$

Érdemes belátni, hogy ez a $\succsim_L$ reláció teljes, tranzitív, azaz racionális, valamint erősen monoton és szigorúan konvex. (Minden $\sim(x), x \in X$ közömbösségi görbe egy pont.)

A legutolsó zárójeles mondatból, már látszik, komoly probléma merül fel a lexikografikus rendezés reprezentálhatóságával kapcsolatban. Ez a reprezentálhatóság ugyanis pontosan azt követelné meg, hogy a síknegyed minden egyes pontját, a nemnegatív számegyenes egymástól különböző pontjainak feleltessük meg, úgy hogy megőrizzük a preferenciasorrendet. Mindenki érzi, hogy ez nem sikerülhet.

8.B.2. Segédtétel. *A $\succsim_L$ lexikografikus preferenciarendezés nem reprezentálható hasznossági függvénnyel.*

Bizonyítás: Tegyük fel – indirekt módon –, hogy az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény reprezentálja $\succsim_L$-t! Ekkor minden $x_1 \in \mathbb{R}$ értékhez válasszunk egy racionális $r(x_1)$ számot oly módon, hogy

$$u(x_1, 1) < r(x_1) < u(x_1, 2).$$

Ilyen nyilván létezik, mert a racionális számok mindenhol sűrűen vannak. Az is igaz, hogy $x_1 > x_1'$ esetén $r(x_1) > r(x_1')$, hiszen

$$r(x_1) > u(x_1, 1) > u(x_1', 2) > r(x_1').$$

Ez azt jelenti, hogy az $r : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ leképezésnek egy-egy értékűnek kellene lennie, ami képtelenség. A valós számok halmaza kontinuum számosságú, míg a racionális számoké megszámlálhatóan végtelen. □

Ezek szerint más tulajdonságok teljesülését is meg kell követelnünk, ha élni kívánunk a reprezentálhatóság nyújtotta kényelemmel.

8.B.3. Definíció. *A fogyasztó $\succsim$ preferenciarendezése* folytonos*, ha az alsó és felső szinthalmazai, azaz a*

$$\{x \in X \,|x' \succsim x, \} \qquad \forall x' \in X$$

és az

$$\{x \in X \,|x \succsim x', \} \qquad \forall x' \in X$$

halmazok zártak.

□ □ □

8.B.4. Feladat. *Lássuk be, hogy a lexikografikus rendezés nem folytonos!*

□ □ □

A rendezés folytonossága alapvető fontosságú a reprezentálhatóság szempontjából, ugyanis amennyiben fennáll, akkor nem csak a reprezentálhatóság, hanem a folytonos reprezentálhatóság is igaz.

8.B.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\succsim$ racionális preferenciarendezés folytonos! Ekkor reprezentálható egy $u : X \to \mathbb{R}$* folytonos *hasznossági függvénnyel.*

Bizonyítás: A tétel igazolása ebben az általános formában túl bonyolult ahhoz, hogy itt foglalkozzunk vele. Arra az esetre bizonyítunk, amikor $\succsim$ monoton.

Jelöljük az összegzővektort az $\mathbf{1}$ szimbólummal, és legyen

$$Z = \{\alpha \mathbf{1} \,|\alpha \geqq 0\}!$$

Ekkor a monotonitásból minden $x \in X$-re $x \succsim 0$ és minden $\bar{\alpha} \geqq 0$-ra, amire $\bar{\alpha}\mathbf{1} > x, \bar{\alpha}\mathbf{1} \succsim x$. Legyen

$$\begin{aligned} A^+ &= \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \,|\alpha \mathbf{1} \succsim x\}, \\ A^- &= \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \,|x \succsim \alpha \mathbf{1}\}. \end{aligned}$$

Ezek a halmazok a folytonossági tulajdonság fennállása miatt zártak (és nyilvánvalóan nem üresek). A racionális preferenciarendezés teljességéből

$$\mathbb{R}_+ \subseteq \left(A^- \cup A^+\right).$$

$\mathbb{R}$ összefüggő, A^- és A^+ nem üres és zárt, amiből következik, hogy $(A^- \cap A^+) \neq \emptyset$, azaz létezik olyan $\alpha(x) \in (A^- \cap A^+)$, amire $\alpha(x)\,\mathbf{1} \sim x$. A monotonitásból az is következik, hogy ez az $\alpha(x)$ egyértelmű.

Definiáljuk az $u : X \to \mathbb{R}$ hasznossági függvényt a következő módon:

$$\forall x \in X\text{-re} \quad u(x) \triangleq \alpha(x).$$

Ez az u hasznossági függvény reprezentálja a preferenciákat, azaz

$$[\alpha(x) \geqq \alpha(x')] \Longleftrightarrow [x \succsim x'],$$

hiszen:
(i) Tegyük fel, $\alpha(x) \geqq \alpha(x')$. A (gyenge) monotonitással $\alpha(x)\,\mathbf{1} \succsim \alpha(x')\,\mathbf{1}$. Miután azonban $\alpha(x)\,\mathbf{1} \sim x$ és $\alpha(x')\,\mathbf{1} \sim x'$, ezért $x \succsim x'$.
(ii) Másik oldalról tegyük fel, $x \succsim x'$. Ekkor $\alpha(x)\,\mathbf{1} \sim x \succsim x' \sim \alpha(x')\,\mathbf{1}$, és így a monotonitással $\alpha(x) \geqq \alpha(x')$ szükségképpen.

A folytonosság bizonyítása technikailag kicsit bonyolultabb, de csupán elemi eszközöket használ. Hasznos gyakorlásként érdemes megcsinálni.

Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $x^q \in \mathbb{R}^N$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatra, amire $\lim_{q\to\infty} x^q = x$, $\lim_{q\to\infty} \alpha(x^q) = \alpha(x)$. Vegyük az x pont egy $\varepsilon > 0$ sugarú zárt $B(x, \varepsilon)$ környeztét. Ekkor szükségképpen létezik olyan x^+és x^- vektor, amire $x^- \leqq x \leqq x^+$ minden $x' \in B(x, \varepsilon)$-re. Legyen α^- és α^+ az a két valós nemnegatív szám, amelyekre $\alpha^-\mathbf{1} \sim x^-$, illetve $\alpha^+\mathbf{1} \sim x^+$. Innen tudjuk a monotonitással, hogy az eredeti sorozat minden olyan részsorozatára, amire (átindexelés után) $x^q \in \mathbb{R}^N \cap B(x, \varepsilon)$, $q = 1, 2, \ldots$, az $\alpha(x^q)$ sorozat a $[\alpha^-, \alpha^+] \subset \mathbb{R}_+$ kompakt halmazba esik. Emiatt ennek szükségképpen van konvergens részsorozata (*Bolzano-Weierstrass*-tétel). Azt kell megmutatnunk, hogy minden ilyen konvergens részsorozat torlódási pontja az $\alpha(x)$ érték. Tegyük fel, ez nem igaz. Ekkor létezik olyan egy olyan szigorúan monoton $w(\cdot)$ függvény, ami minden természetes q számhoz egy természetes $w(q)$ számot rendel, és amire $\lim_{q\to\infty} \alpha\left(x^{w(q)}\right) = \hat{\alpha} \neq \alpha(x)$. Az általánosság megsértése nélkül tegyük azt fel, hogy $\hat{\alpha} > \alpha(x)$. A monotonitás miatt $\hat{\alpha}\mathbf{1} \succ \alpha(x)\,\mathbf{1}$. Legyen most $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\hat{\alpha} + \alpha(x)\right]$. Ekkor az $\bar{\alpha}\mathbf{1}$ pont az $[\hat{\alpha}\mathbf{1}, \alpha(x)\,\mathbf{1}] \subset Z$ zárt szakasz felezőpontja. Ismét a monotonitással $\bar{\alpha}\mathbf{1} \succ \alpha(x)\,\mathbf{1}$. Mivel $\alpha\left(x^{w(q)}\right) \to \hat{\alpha} > \bar{\alpha}$, ezért létezik olyan $\bar{Q}$, hogy minden $q > \bar{Q}$ esetén $\alpha\left(x^{w(q)}\right) > \bar{\alpha}$. Minden ilyen q-ra $x^{w(q)} \sim \alpha\left(x^{w(q)}\right)\mathbf{1} \succ \bar{\alpha}\mathbf{1}$ (megint a monotonitást használtuk). A preferenciarendezés folytonos lévén, az $\bar{\alpha}\mathbf{1}$ pontnál nem rosszabb pontok halmaza zárt. Miután $x^{w(q)} \to x$, ebből az következik, hogy határátmenettel $x \succsim \hat{\alpha}\mathbf{1}$, ami ellentmondás. Hasonló módon járunk el, ha azt tételezzük fel, hogy $\alpha(x) > \hat{\alpha}$. Emiatt minden konvergens részsorozat az $\alpha(x)$ értékhez tart, és ezzel készen vagyunk. □

8.C. További tulajdonságok

A továbbiakban gyakran használunk két preferenciatípust, amelyek tulajdonságait érdemes alaposan elemeznünk.

8.C.1. Definíció. *Egy monoton $\succsim$ preferenciarendezés* homotetikus, *ha*

$$x^1 \sim x^2 \Longrightarrow \alpha x^1 \sim \alpha x^2, \text{ tetszőleges } \alpha \geqq 0 \text{ esetén}$$

8.C.2. Definíció. *Egy az $X = \left\{\mathbb{R}_+^{N-1} \times (-\infty, \infty)\right\}$ halmazon értelmezett $\succsim$ preferenciarendezés kvázilineáris az N-edik jószágban, ha*

$$x^1 \sim x^2 \Longrightarrow \left(x^1 + \alpha e^N\right) \sim \left(x^2 + \alpha e^N\right),$$

ahol $e^N = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, azaz a közömbösségi halmazok egymás párhuzamos eltoltjai, és

$$x + \alpha e^N \succ x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N \text{ és } \forall \alpha > 0\text{-ra},$$

azaz az N-edik jószágban monoton.

8.C.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a kvázilinearitás definíciójában – kényelmi szempontból – megengedjük, az N-edik jószág negativitását.*

A továbbiakban mindig folytonos preferenciarendezésekkel dolgozunk. Ekkor igazak a következő feladatban megfogalmazott állítások.

□ □ □

8.C.4. Feladat. *Legyen $\succsim$ folytonos racionális preferenciarendezés. Lássuk be, hogy amennyiben*
(i) *(szigorúan) monoton, akkor az őt reprezentáló u hasznossági függvény (szigorúan) monoton növekszik;*
(ii) *(szigorúan) konvex, akkor az őt reprezentáló u hasznossági függvény (szigorúan) kvázikonkáv [de nem feltétlenül (szigorúan) konkáv].*

□ □ □

A következő két feladatban érdemes arra felfigyelnünk, hogy az igazolandó tulajdonságok nem érvényesek *minden* reprezentáló hasznossági függvényre, csak annyit állítunk, hogy létezik *legalább egy,* a megfelelő tulajdonsággal bíró reprezentáció. Ezért azt mondhatjuk, hogy míg a monotonitás és a kvázikonkavitás a hasznossági függvény *ordinális* tulajdonsága, azaz megőrződik minden pozitív monoton transzformáció által, addig a alábbi kettő *kardinális* tulajdonsága (azaz nem őrződik meg minden pozitív monoton transzformáció által). Hasonlóképpen a folytonosság is ilyen kardinális tulajdonság.

□ □ □

8.C.5. Feladat. *Legyen $\succsim$ folytonos racionális preferenciarendezés. Lássuk be: homotetikus akkor és csak akkor, ha létezik őt reprezentáló első fokon homogén hasznossági függvény.*

□ □ □

□ □ □

8.C.6. Feladat. *Legyen $\succsim$ folytonos racionális preferenciarendezés. Lássuk be: kvázilineáris akkor és csak akkor, ha létezik őt reprezentáló*

$$u(x) = v(x_1, \ldots, x_{N-1}) + x_N$$

alakú hasznossági függvény![4]

□ □ □

[4] Az állítás „csak akkor” része nehéz és jóval komplikáltabb az „akkor” implikációnál. Csak az vágjon bele, akiben elég kurázsi van. Sugallat: a bizonyítás azon az ötleten alapszik, mint a 8.B.5. Tétel bizonyítása, annyiban, hogy az N-edik tengellyel párhuzamos egyenes veszi át az origóból induló félegyenes szerepét. Érdemes az $X = \Re_+ \times \Re$ esettel próbálkozni.

9. fejezet

A (neo)klasszikus keresletelmélet alapjai (II)

9.A. A fogyasztó feladatai

Az eddig tanultakra alapozva folytatjuk a keresletelmélet tanulmányozását. Némi áldozatot hozunk: nem a legáltalánosabb modellel dolgozunk. Érvényesnek tekintjük a következőt:

9.A.1. Feltevés. *A fogyasztó X fogyasztási halmaza a nemnegatív orthans, azaz $X = \Re_+^N$. A fogyasztó lokálisan telhetetlen, a $\succsim$ racionális preferenciarendezését a folytonos $u : X \to \Re$ hasznossági függvény reprezentálja. A számára elérhető hasznossági szintek halmaza $U^+ \subset \Re$. A fogyasztó mindezeken túl árelfogadó, az árak és a jövedelme pozitív értékek, azaz $p > 0$, $w > 0$.*

A későbbiekben fontos szerepet kap a fogyasztó korábbról már ismert költségvetési leképezése.

9.A.2. Definíció. *A $B : \mathbb{R}_{++}^N \times \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}_+^N$ leképezést , ahol*

$$B\left(p, w\right) = \left\{x \in \mathbb{R}_+^N \left| px \leqq w\right.\right\} \tag{9.A–1}$$

a fogyasztó költségvetési leképezésének *hívjuk. A $B\left(p, w\right)$ költségvetési halmaz azokat a fogyasztási vektorokat tartalmazza, amelyeket a fogyasztó a $p > 0$ árak és a $w > 0$ jövedelem mellett kifizetni képes.*

A költségvetési leképezést jellemzi a következő segédtétel.

9.A.3. Tétel. *A költségvetési leképezés folytonos pont-halmaz leképezés.*

BIZONYÍTÁS: Először lássuk be, hogy felülről félig folytonos! Ehhez vegyünk egy

$$(p^q, w^q)_{q=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_{++}^N \times \mathbb{R}_{++}$$

sorozatot, ami egy $\left(p^0, w^0\right) \in \mathbb{R}_{++}^N \times \mathbb{R}_{++}$ ponthoz tart. Legyen $x^q, q = 1, 2, \ldots \in \mathbb{R}_+^N$ olyan sorozat, ami egyrészt tart egy $x^0 \in \mathbb{R}_+^N$ ponthoz, másrészt minden q-ra $p^q x^q \leqq w^q$. A skaláris szorzat folytonosságából az utóbbi egyenlőtlenség határátmenetben is igaz, azaz $p^0 x^0 \leqq w^0$. Így $x^0 \in B\left(p^0, w^0\right)$, vagyis a leképezés felülről félig folytonos.

Az alulról félig folytonosság bizonyításához tekintsünk ismét egy

$$(p^q, w^q)_{q=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_{++}^N \times \mathbb{R}_{++}$$

sorozatot, ami egy $\left(p^0, w^0\right) \in \mathbb{R}_{++}^N \times \mathbb{R}_{++}$ ponthoz tart. Legyen $x^0 \in B\left(p^0, w^0\right)$! Ha $x^0 = 0$, akkor a bizonyítás roppant egyszerű, mert a keresett $x^q, q = 1, 2, \ldots \in \mathbb{R}_+^N$ sorozatot választhatjuk úgy, hogy minden q-ra $x^q = x^0$. Tegyük fel tehát, hogy $x^0 \neq 0$. Azt kell megnéznünk, találunk-e hozzá olyan $x^q, q = 1, 2, \ldots \in \mathbb{R}_+^N$ sorozatot, ami ehhez az x^0ponthoz tart és minden q-ra $p^q x^q \leqq w^q$. Két esetet különböztetünk meg:

(i) $p^0 x^0 < w^0$. Ekkor egy megfelelően nagy Q-ra és $q \geqq Q$ természetes számokra az $x^q \triangleq x^0$ választás adja a keresett sorozatot.

(ii) $p^0 x^0 = w^0$. Legyen $\lambda^q \in \mathbb{R}_+$ az a maximális érték, amire

$$\lambda^q p^q x^0 \leqq w^q.$$

Ilyen λ^q szükségképpen létezik az árak és a jövedelem pozitivitása, valamint a skaláris szorzat folytonossága miatt. Sőt, a λ^q értékek korlátosak. Így a λ^q sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Belátjuk, hogy minden ilyen részsorozatra $\lim_{q\to\infty} \lambda^q = \lambda^0 = 1$. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét! Ekkor a skaláris szorzat folytonossága miatt

$$\lim_{q\to\infty} \lambda^q p^q x^0 = \lambda^0 p^0 x^0 \neq\neq p^0 x^0,$$

de ez ellentmondásban a (ii) eset alapfeltevésével. Térjünk át most egy ilyen, az 1 értékhez konvergáló részsorozatra, és már majdnem készen is vagyunk. Definiáljuk az x^q sorozatot az

$$x^q \triangleq \lambda^q x^0$$

szabállyal. Ekkor minden q-ra $x^q \in \mathbb{R}_+^N$ és $p^q x^q \leqq w^q$,valamint $\lim_{q\to\infty} x^q = x^0$. Így az alulról félig folytonosságot is beláttuk.

□

A fogyasztó számára két egymástól egyáltalán nem független célt tűzünk ki, két szélsőérték-számítási feladatot kell megoldania. Közülük az első a *haszonmaximalizálási feladat* (HMF*), amiben a hasznát maximalizálja a költségvetési halmaza fölött:[5]

$$\max_{x\in\mathbb{R}_+^N} u(x) \tag{HMF*}$$

$$px \leqq w. \tag{9.A–2}$$

A másik a (feltételes) *kiadásminimalizálási feladat* a (KiadMF*), itt a minimális kiadási összeggel kell biztosítania magának egy, feltételként előre megadott, de elérhető $u > u(0)$ hasznossági szintet:

$$\min_{x\in\mathbb{R}_+^N} px \tag{KiadMF*}$$

$$u(x) \geqq u > u(0) \tag{9.A–3}$$

$$u \in U^+. \tag{9.A–4}$$

Szerencsénkre, a feltevéseink mellett a fogyasztó egyik feladata sem reménytelen. Ezt látjuk be a következő tételben.

9.A.4. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztó mindkét feladata megoldható.*

Bizonyítás: Tekintsük először a haszonmaximalizálási feladatot! A (9.A–1) szabállyal adott költségvetési halmaz az árak pozitivitása miatt biztos nem üres, korlátos, és a skaláris szorzat folytonossága miatt, zárt. Ennek a kompakt halmaznak az $\mathbb{R}_+^N$ nemnegatív, zárt orthánssal vett metszete, nemüres, kompakt halmaz, ami fölött a folytonos u függvény szükségképpen felveszi a maximumát.

Hasonlóan érvelhetünk a kiadásminimalizálási feladat megoldhatósága mellett.[6] Mivel $u \in U^+$, ezért létezik $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^N$, amire $u(\bar{x}) = u$, így az

$$A_{\bar{x}} = \{x \in X \,|px \leqq p\bar{x}, \text{ és } u(x) \geqq u\}$$

halmaz biztos nem üres, kompakt, hiszen az u függvény és a skaláris szorzat is folytonos, és a halmaz nyilvánvalóan korlátos p pozitivitása miatt. Ezért az $A_{\bar{x}}$ halmaz fölött a px skaláris szorzat felveszi a minimumát egy x^* pontban. Megmutatjuk, hogy x^* megoldása a (KiadMF*) feladatnak is. Ha $x \in A_{\bar{x}}$, akkor

[5] Első pillantásra (HMF*) hasonló szerkezetű, mint a termelő (PMF) feladata. Ez azonban egyáltalán nincs így. Nem csupán annyi a különbség, hogy míg a termelő feladatában a célfüggvény lineáris, a feltételi nem az, addig a fogyasztónál ez pont fordítva van. Az igazi, lényeges különbség abból fakad, hogy a fogyasztó feladatában a feltételi halmaz függ a (p, w) paraméterektől, a termelőnél nem. Emiatt a fogyasztó elmélete bonyolultabbá válik.

[6] Vegyük észre, hogy a (KiadMF*) matematikai szempontból hasonló a termelő feltételes költségminimalizálási (KMF) feladatához. Ezért annak megoldhatósága biztosítja ennek megoldhatóságát is. Erre az hasonlóságra a későbbiekben sokszor hivatkozunk majd.

$px \geqq px^*$,hiszen x^* kiadásminimalizáló volt az $A_{\bar{x}}$ fölött. Ha $u(x) \geqq u$ és $x \notin A_{\bar{x}}$, akkor $px > p\bar{x}$, így $px > px^*$. Ezek szerint x^* optimális a (KiadMF*) feladatban.□

9.A.5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a tétel bizonyításában sehol sem használtuk a lokális telhetelenséget, anélkül is igaz az állítás.*

A továbbiakban először megvizsgáljuk a két feladatot külön-külön, aztán – a következő fejezetben – a köztük levő kapcsolatot tárgyaljuk.

9.B. A haszonmaximalizálási feladat és megoldása

Először vegyük észre, hogy a (HMF*) megoldása, amiről már tudjuk, hogy minden pozitív árvektor és jövedelem mellett létezik, nem lehet akármilyen. Igaz ugyanis a következő állítás:

9.B.1. Segédtétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztó teljesen elkölti a jövedelmét.*

Bizonyítás: Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz egy (p', w') árvektor és jövedelem mellett a fogyasztó optimális $x'(p', w')$ fogyasztási vektorára

$$p'x'(p', w') < w'.$$

Mivel a fogyasztó lokálisan telhetetlen, ezért tetszőlegesen kicsi pozitív ε sugarú környezetében létezik nála jobb fogyasztás, azaz

$$\exists x'' \in X \cap B(x', \varepsilon), \text{ amire } u(x'') > u(x').$$

Ha azonban ε-t elég kicsinek választjuk, akkor a skaláris szorzat folytonossága miatt

$$p'x'' < w',$$

és ez ellentmondásban van azzal, hogy a fogyasztó maximalizálta hasznát a jövedelemkorlátja mellett. □

A 9.B.1. Segédtétel alapján a fogyasztó haszonmaximalizálási feladata átírható a kövekező alakba:[7]

$$\max_{x \in \mathbb{R}^N_+} u(x) \tag{HMF}$$

$$px = w. \tag{9.B–1}$$

A (HMF) feladat alapján definiálhatunk két fogalmat:

[7] Erre a feladatra a későbbiekben közvetlenül alkalmazhatjuk majd a burkolótételt, ha szükségünk lesz rá.

9.B.2. Definíció. *A (HMF) feladat $v : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvényét a fogyasztó* indirekt *vagy* közvetett hasznossági függvény*ének hívjuk. A közvetett hasznossági függvény tehát minden ár és jövedelem esetén megadja a preferenciák adott u reprezentációjával elérhető legmagasabb $v(p, w)$ hasznossági szintet.*[8]
A (HMF) feladat $x : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^N_{+}$ megoldásleképezését a fogyasztó walrasi keresleti leképzés*ének hívjuk. Ez a leképezés általában pont-halmaz leképezés, pótlólagos feltételek szükségesek ahhoz, hogy minden (p, w) pár mellett az $x(p, w)$ halmaz egyelemű legyen. Ez esetben a leképezést* walrasi keresleti függvény*nek hívjuk. Tetszőleges $x^* \in x(p, w)$ esetén nyilván $u(x^*) = v(p, w)$.*[9]

9.B.1. Az indirekt hasznossági függvény tulajdonságai

Ha nem teszünk fel további feltételeket a fogyasztó preferenciáira vonatkozóan, akkor az indirekt hasznossági függvény tulajdonságait összefoglalhatjuk az alábbi tételben.

9.B.3. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztó $v(p, w)$ közvetett hasznossági függvénye*

(i) nullad fokon homogén (p, w)-ben;

(ii) monoton csökken p_n-ben $n = 1, 2, \ldots, N$, és szigorúan monoton nő w-ben;

(iii) kvázikonvex (p, w)-ben (azaz a $\{(p, w) \,|\, v(p, w) \leqq \bar{v}\}$ halmaz tetszőleges $\bar{v}$ értékre konvex);

(iv) folytonos (p, w)-ben.

9.B.4. Megjegyzés. *Érdemes észrevenni, hogy a $v(p, w)$ egyrészt kvázi*konvex *és nem kvázi*konkáv *(ez utóbbi tulajdonságot az u függvényre szoktuk feltenni), másrészt ez a kvázikonvexitás pusztán az optimalizálás eredménye, nem szükséges hozzá a preferenciák konvexitása.*

Bizonyítás: Az (i) tulajdonság nyilvánvaló: ha egy tetszőleges pozitív skalárral beszorzom mind az árvektort, mind a jövedelmet a (9.A–1) költségvetési halmaz nem változik, ezért az u maximális értéke sem változhat fölötte.

A (ii) pont bizonyítása sem nehéz. Legyen $p' \geqq\neq p$. Nyilván

$$B(p, w) \supseteq B(p', w),$$

ezért az u függvénynek a két halmaz felletti maximumára biztosan igaz a

$$v(p, w) \geqq v(p', w)$$

[8] Vegyük észre, noha az argumentumban csak az egyébként *megfigyelhető* árvektor és a jövedelem szerepel, a nem megfigyelhető és nem egyértelmű hasznossági reprezentációtól is függ a közvetett hasznossági függvény értéke. Helyesebb lenne tehát a $v_u(p, w)$ jelölés használata.

[9] A keresleti leképezés – szemben az indirekt hasznossági függvénnyel – nem függ az u hasznossági reprezentációtól. Erre később visszatérünk.

reláció. Legyen most $w' > w$! Ekkor

$$B(p, w') \supset B(p, w)$$

és minden olyan x vektorra, amire $px = w'$, igaz, hogy $x \notin B(p, w)$. A 9.B.1. Segédtétellel azonban ebből következik, hogy

$$v(p, w') > v(p, w).$$

A (iii) tulajdonság igazolásához tegyük fel, hogy

$$v(p, w) \leqq \bar{v} \text{ és } v(p', w') \leqq \bar{v}.$$

Legyen tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ skalárra

$$(p'', w'') = (\lambda p + (1 - \lambda) p', \lambda w + (1 - \lambda) w').$$

Azt kell belátnunk, hogy $v(p'', w'') \leqq \bar{v}$, azaz minden x vektorra, amire $p''x \leqq w''$, $u(x) \leqq \bar{v}$. Egy ilyen x-re

$$\lambda px + (1 - \lambda) p'x \leqq \lambda w + (1 - \lambda) w'$$

Emiatt vagy $px \leqq w$, vagy $p'x \leqq w'$, vagy mindkettő. Tegyük fel, az első egyenlőtlenség igaz. Ekkor

$$u(x) \leqq v(p, w) \leqq \bar{v}.$$

Ha a második egyenlőtlenség igaz, akkor úgyanígy érvelhetünk.

A (iv) pontban szereplő folytonosság a *Berge*-tétel következménye. Legyen ugyanis

$$\begin{aligned} S &\triangleq \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++}, \quad T \triangleq \mathbb{R}^N_{+}, \quad \Phi(\cdot) \triangleq B(p, w) \\ f(\cdot, \cdot) &\triangleq u(x), \quad (\text{konstans } (p, w)\text{-ben}), \quad \varphi(\cdot) \triangleq v(p, w). \end{aligned}$$

Problémát jelent azonban, hogy itt a $T \triangleq \mathbb{R}^N_{+}$, képhalmaz nem kompakt. Szerencsére könnyen megmutatható, hogy a $(p, w) \in \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ párok minden kompakt halmazának a B leképezés által adott képe kompakt, és ez elegendő a *Berge*-tétel alkalmazhatóságához. □

9.B.2. A *walrasi* keresleti leképezés tulajdonságai

Hasonlóképpen nézzük meg, mit tudunk mondani a walrasi keresleti leképezésről, ha nem élünk az eddigieken túl egyéb feltételezéssel. Nem túl sokat, de legalább ezek a tulajdonságok ismertek már a számunkra.

9.B.5. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztó* $x(p, w)$ walrasi *keresleti leképezése*

(i) nullad fokon homogén (p, w)-ben;

(ii) kielégíti a *Walras*-törvényt, azaz $px(p, w) = w$;

(iii) felülről félig folytonos (p, w)-ben, (ha a leképezés függvény, akkor folytonos (p, w)-ben).

Bizonyítás: Az (i) pont igazolása teljesen hasonló a 9.B.3. Tétel (i) pontjának bizonyításához.

A (ii) tulajdonság azonnal következik a 9.B.1. Segédtételből.

A (iii) pont hasonló módon igazolható mint a 9.B.3. Tétel (iv) pontja, azzal a kiegészítéssel, hogy $\mu(\cdot) \triangleq x(p, w)$. □

Többet tudunk mondani a fogyasztó keresleti viselkedéséről, ha feltesszük, hogy a fogyasztó preferenciái konvexek.

9.B.6. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, valamint a fogyasztó preferenciái (szigorúan) gyengén konvexek, azaz az u hasznossági függvény (szigorúan) kvázikonkáv, akkor a fogyasztó $x(p, w)$ walrasi keresleti leképezése konvex értékű (függvény).*

Bizonyítás: Tekintsünk egy $x^* \in x(p, w)$ fogyasztási vektort és legyen $u^* = u(x^*)$. A

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^N \,|u(x) \geqq u^* \right\}$$

halmaz konvex a preferenciák gyenge konvexitása miatt. Hasonlóan konvex a $B(p, w)$ halmaz. Azt is tudjuk, hogy ezek miatt az

$$x(p, w) = \left\{x \in \mathbb{R}_+^N \,|u(x) \geqq u^* \right\} \cap B(p, w) \tag{9.B–2}$$

halmaz is szükségképpen az. Erről a metszetről könnyű belátni, hogy egy szakasz, ami azonban csak akkor nem mond ellent az esetleges szigorú konvexitásnak, ha csak egyetlen pontból áll. □

□ □ □

9.B.7. Feladat. *Lássuk is be, hogy a (9.B–2) metszet szakasz!*

□ □ □

Még pontosabban jellemezhetjük a keresleti viselkedést, ha azt is feltesszük, hogy az u hasznossági függvény folytonosan differenciálható. Egy pillanatra térjünk vissza a (HMF) feladatra! Erről tudjuk, hogy ha egy x^* pont optimális megoldása, akkor szükségképpen teljesülnie kell a következő *Kuhn-Tucker*-féle feltételeknek. Minden $n = 1, 2, \ldots, N$ jószágra

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} \leqq \lambda^* p_n, \text{ és ez egyenlőségre teljesül, ha } x_n^* > 0, \tag{9.B–3}$$

ahol λ^* a költségvetési korláthoz rendelt duálváltozó optimális értéke.

Ezek szerint, ha x^* belső pont, akkor az árvektor arányos a hasznossági függvény gradiensével. Az is igaz, hogy minden két különböző $l, k = 1, 2, \ldots, N$ jószágra

$$\frac{\partial u(x^*) / \partial x_l}{\partial u(x^*) / \partial x_k} = \frac{p_l}{p_k}. \tag{9.B–4}$$

Az egyenlőség bal oldala nem más, mint a két jószág közötti helyettesítési határarány, hiszen az $\sim (x^*)$ közömbösségi görbe mentén minden differenciális változásra (ha a többi jószág szintje változatlan)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

amiből

$$\left| \frac{dx_k}{dx_l} \right| = \frac{\partial u(x^*) / \partial x_l}{\partial u(x^*) / \partial x_k}.$$

□ □ □

9.B.8. Feladat. *Vizsgáljuk, mi történik, ha x^*nem belső megoldás!*

□ □ □

Miután a 9.B.1. Segédtételből tudjuk, hogy a költségvetési korlát egyenlőségre teljesül, ebből a duálváltozók általános értelmezése alapján azt is tudjuk, hogy az optimális megoldásban λ^* nem más mint az adott p árak mellett a jövedelem határhaszna.

□ □ □

9.B.9. Feladat. *Próbáljunk meg a hasznossági függvényre olyan feltételeket adni, amelyek mellett a (9.B–4) feltételek elégségesek is.*

□ □ □

9.B.3. Az indirekt hasznossági függvény és a walrasi keresleti függvény kapcsolata

Ha most feltesszük azt is, hogy az indirekt hasznossági függvény is folytonosan differenciálható (ami egyáltalán nem magától értetődő), akkor érdekes kapcsolatot fedezhetünk fel a közvetett hasznossági függvény és a *walrasi* keresleti függvény között.[10]

[10] Vegyük észre, itt biztos, hogy keresleti *függvény*ről beszélünk!

9.B.10. Tétel. (Roy-azonosság) *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, valamint az indirekt hasznossági függvény folytonosan differenciálható, akkor minden $n = 1, 2, \ldots, N$ jószágra*

$$x_n(p, w) = -\frac{\partial v(p, w) / \partial p_n}{\partial v(p, w) / \partial w}.$$

BIZONYÍTÁS: A feltételekből tudjuk, hogy (i) $px(p, w) = w$ mindig (9.B.1. Segédtétel), másrészt (ii) $v(p, w) = u(x(p, w))$. Emiatt a keresleti függvény is folytonosan differenciálható, így fennállnak a burkolótétel feltételei. Ebből már azonnal adódik az állítás. □

9.B.11. Megjegyzés. *Érdemes szem előtt tartanunk, hogy míg az indirekt hasznossági függvény függ a reprezentációtól, addig a keresleti függvény nem. Szerencsénkre a reprezentáció hatása eltűnik azzal, hogy mind a számlálóban, mind a nevezőben szerepel a monoton transzformáció deriváltja. Legyen ugyanis* $u(x) = \varphi\left(u^0(x)\right)$*,ahol* $\varphi' > 0$*,ekkor*

$$v_u(p, w) = u(x(p, w)) = \varphi\left(u^0(x(p, w))\right) = v_{u^0}(p, w)$$

és a láncszabállyal

$$\frac{\partial v_u(p, w)}{\partial p_n} = \varphi'\left(u^0(x(p, w))\right) \cdot \frac{\partial v_{u^0}(p, w)}{\partial p_n},$$

valamint

$$\frac{\partial v_u(p, w)}{\partial w} = \varphi'\left(u^0(x(p, w))\right) \cdot \frac{\partial v_{u^0}(p, w)}{\partial w}.$$

Ezek hányadosa

$$\frac{\partial v_u(p, w) / \partial p_n}{\partial v_u(p, w) / \partial w} = \frac{\partial v_{u^0}(p, w) / \partial p_n}{\partial v_{u^0}(p, w) / \partial w}$$

nyilván nem függ a reprezentációtól.

□ □ □

9.B.12. Feladat. *Legyenek a preferenciák CES-típusúak:*

$$u(x_1, x_2) = \left(x_1^{-\beta} + x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad -1 \leqq \beta \neq 0.$$

Lássuk be, hogy ezek a preferenciák kielégítik a 9.A.1. Feltevést, erősen monotonak és gyengén konvexek! Bizonyítsuk be, hogy a $-1 < \beta \neq 0$ *esetben szigorúan konvexek! Vezessük le az indirekt hasznossági függvényt és a keresleti függvényeket! Igazoljuk ebben a speciális esetben a* Roy-azonosságot*!*

□ □ □

9.C. A kiadásminimalizálási feladat és megoldása

A fogyasztó (KiadMF*) feladatának elemzésénél ugyanazt az utat követjük, mint a (HMF*) feladat vizsgálatánál. Sokszor hivatkozunk emellett a már jelzett matematikai hasonlóságra, ami a (KiadMF*) és a termelő (KMF) feladata között fennáll. Az egyetlen dolog, ami gondot okozhat az az, hogy ebben a fogyasztói modellben vajon mi felelhet meg a termelő inputigényhalmazának.

9.C.1. Definíció. *A fogyasztási vektoroknak azt a*

$$X(u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \, | u(x) \geqq u \right\}$$

halmazát, amely a fogyasztó számára egy $u \in U^+$ hasznossági szint elérését teszi lehetővé a fogyasztó fogyasztási igény halmazának *nevezzük.*

Először vegyük észre, hogy a (KiadMF*) megoldása, amiről már tudjuk, hogy minden pozitív árvektor és jövedelem mellett létezik, sem lehet akármilyen. Igaz ugyanis a következő állítás:

9.C.2. Segédtétel. *Ha a 9.A. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztónál nem keletkezik többlethaszon.*

Bizonyítás: Legyen x^*optimális megoldása a (KiadMF*) feladatnak és tegyük fel, hogy $u(x^*) > u$. Tekintsünk egy $x' = \alpha x^*$, $\alpha \in (0,1)$ fogyasztási vektort. Az u függvény folytonosságából tudjuk, hogy létezik olyan α', ami elég közel van egyhez és még $u(x') \geqq u$. Erre nyilván $px' < px^*$, ami ellentmond annak, hogy x^*optimális volt. □

A 9.C.2. Segédtétel alapján a fogyasztó kiadásminmalizálási feladata átírható a követkző alakba:[11]

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N_+} px \qquad \text{(KiadMF)}$$

$$u(x) = u > u(0). \qquad (9.\text{C–1})$$

A (KiadMF) feladat alapján definiálhatunk két fogalmat:

9.C.3. Definíció. *A (KiadMF) feladat $e : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értékfüggvényét a fogyasztó* kiadási függvény*ének hívjuk. A kiadási függvény tehát minden ár és hasznossági szint azt a minimális kiadási összeget adja, amellyel az adott hasznossági szint elérhető.*
A (KiadMF) feladat $h : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^N_+$ megoldásleképezését a fogyasztó hicksi *(vagy* kompenzált*)*[12] keresleti leképzés*ének hívjuk. Ez a leképezés általában ponthalmaz leképezés, pótlólagos feltételek szükségesek ahhoz, hogy minden (p,u) pár mellett az $h(p,u)$ halmaz egyelemű legyen. Ez esetben a leképezést* hicksi keresleti függvény*nek hívjuk. Tetszőleges $h^* \in h(p,u)$ esetén nyilván $ph^* = e(p,u)$.*

[11] Erre a feladatra a későbbiekben szintén közvetlenül alkalmazhatjuk majd a burkolótételt, ha szükségünk lesz rá.

[12] A *kompenzált* jelzőt később magyarázzuk meg.

9.C.1. A kiadási függvény tulajdonságai

Ha nem teszünk fel további feltételeket a fogyasztó preferenciáira vonatkozóan, akkor a kiadási függvény tulajdonságait összefoglalhatjuk az alábbi tételben.[13]

9.C.4. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztó* $e(p, u)$ *kiadási függvénye*

(i) első fokon homogén p -ben;

(ii) monoton nő p_n-ben $n = 1, 2, , \ldots, N$, és szigorúan monoton nő u-ban;

(iii) konkáv p -ben ;

(iv) folytonos p -ben.

Bizonyítás: Kihasználjuk, hogy az $e(p, u)$ kiadási függvény nem más mint az $X(u)$ fogyasztási igény halmaz támaszfüggvényének ellentettje. Ebből az (i), és (iii) pont azonnal adódik.

(ii) Ehelyütt kihasználjuk a már többször említett hasonlóságot a (KiadMF*) és a (KMF) feladatok között. Lásd a költségfüggvény tulajdonságaira vonatkozó tétel (ii) pontját!

(iv) Lásd a költségfüggvény tulajdonságaira vonatkozó tétel (vi) pontját! □

9.C.2. A *hicksi* kompenzált keresleti leképezés tulajdonságai

Hasonlóképpen nézzük meg, mit tudunk mondani a hicksi keresleti leképezésről, ha nem élünk az eddigieken túl egyéb feltételezéssel.

9.C.5. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, akkor a fogyasztó* $h(p, u)$ hicksi *keresleti leképezése teljesíti a következőket:*[14]

(i) nullad fokon homogén p -ben;

(ii) tetszőleges $x \in h(p, u)$-ra $u(x) = u$;

Bizonyítás: Az (i) pont igazolása nagyon könnyű. Ha az árvektort beszorozzuk egy tetszőleges pozitív skalárral, az $X(u)$ feltételi halmaz nem változik, ezért a minimumhelyek halmaza sem változhat.

A (ii) tulajdonság azonnal következik a 9.C.2. Segédtételből. □

Többet tudunk mondani a fogyasztó kompenzált keresleti viselkedéséről, ha feltesszük, hogy a fogyasztó preferenciái konvexek.

[13] Felsorolhatnánk a tulajdonságokat abban a sorrendben, ahogy a költségfüggvényt tárgyaltuk, de – később részletezendő okokból – érdemes ragaszkodnunk ahhoz a gondolatmenethez, amit a közvetett hasznossági függvény elemzésénél alkalmaztunk.

[14] A folytonossági tulajdonságot most nem említjük, mert az $X(u)$ halmaz esetleges nem korlátos volta miatt technikailag túl bonyolult ahhoz, hogy e helyütt foglalkozzunk vele.

9.C.6. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, valamint a fogyasztó preferenciái (szigorúan) gyengén konvexek, azaz az u hasznossági függvény (szigorúan) kvázikonkáv, akkor a fogyasztó $h(p,w)$* hicksi *keresleti leképezése konvex értékű (függvény).*

Bizonyítás: Teljesen hasonló a 9.B.6. Tétel bizonyításához. □

□ □ □

9.C.7. Feladat. *Tegyük fel, hogy az u hasznossági függvény folytonosan differenciálható! Mik lesznek a (KiadMF*) optimális megoldásának első rendű feltételei? Mia a kapcsolat ezek között és a (9.B–3)-(9.B–4) feltételek között?*

□ □ □

A kompenzált kereslet egy érdekes tulajdonságát találhatjuk a következő tételben.

9.C.8. Tétel. *(A* hicksi *kompenzált kereslet törvénye) Legyen $h(p,w)$ függvény. Ekkor tetszőleges két $p', p > 0$ vektorokra*

$$[p'-p]\,[h(p',u)-h(p,u)] \leqq 0.$$

Bizonyítás: Miután $h(p',u)$ a p', $h(p,u)$ pedig a p árak mellett költségminimalizáló, ezért

$$\begin{aligned} p'h(p',u) &\leqq p'h(p,u), \\ ph(p',u) &\geqq ph(p,u). \end{aligned}$$

A két egyenlőtlenséget egymásból kivonva kapjuk az állítást. □

Rögzítsük az n-edik jószágtól különböző javak árát, és jelöljük őket a p_{-n} szimbólummal! A *hicksi* kompenzált kereslet törvényéből azonnal következik, hogy egy n-edik jószágra a $h_n(p_n, \bar{p}_{-n}, u)$ kompenzált keresleti függvény, tehát amiben csak a saját ár változik, sosem pozitív meredekségű.

9.C.3. A kiadási függvény és a kompenzált kereslet kapcsolata

Ebben a pontban feltesszük, hogy a kompenzált keresleti leképezés függvény. Ha ismerjük a fogyasztó kompenzált keresleti függvényét, akkor – mint azt már említettük – nagyon egyszerűen származtathatjuk belőle a kiadási függvényt:

$$e(p,u) = ph(p,u).$$

Azonnal felmerül a kérdés: a kiadási függvényből miként származtathatjuk a kompenzált keresleti függvényt anélkül, hogy egy bonyolult feltételes szélsőértékszámítási feladatot megoldanánk? A választ nem meglepő módon ismét a dualitási tételből (vagy a burkolótételből) nyerhetjük.

9.C.9. Tétel. *(*Shephard-*lemma) Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, valamint a kiadási függvény folytonosan differenciálható, akkor minden $n = 1, 2, \ldots, N$ jószágra*

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n} = h_n(p,u),$$

azaz a kiadási függvény egy jószág ár szerinti parciális deriváltja az adott jószágra vonatkozó kompenzált keresleti függvényt adja.

BIZONYÍTÁS: A dualitási tétel vagy a burkolótétel közvetlen következménye. □

További összefüggéseket igazolhatunk, ha feltesszük, hogy a kompenzált keresleti függvény is folytonosan differenciálható, azaz a kiadási függvény kétszer folytonosan differenciálható az árakban.

9.C.10. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll, valamint a kiadási függvény kétszer folytonosan differenciálható (a* Hesse-*mátrix jelölése $D_p^2 e(p,u)$), akkor*

(i) $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$;

(ii) $D_p^2 e(p,u)$ negatív szemidefinit;

(iii) $D_p^2 e(p,u)$ szimmetrikus;

(iv) $D_p^2 e(p,u)\, p = 0$.

BIZONYÍTÁS: Vegyük sorra:
(i) Differenciálással kapjuk a 9.C.9. Tétel állításából.
(ii) Következik a kiadási függvény konkavitásából.
(iii) Közvetlenül jön a *Young*-tételből.
(iv) A kiadási függvény első fokú (és így a kompenzált keresleti függvény nullad fokú) homogenitásának, valamint az *Euler*-tételnek a következménye. □

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő állítást:

9.C.11. Tétel. *Ha a 9.A.1. Feltevés fennáll és az u hasznossági függvény, valamint a kiadási függvény kétszer folytonosan differenciálható, akkor $rD_p^2 e(p,u)\, r < 0$ minden olyan $r \in \mathbb{R}^N$ vektorra, amire $r \neq \alpha p$, $\alpha \in \mathbb{R}$, azaz a $D_p^2 e(p,u)$ mátrix rangja pontosan $N - 1$.*

□ □ □

9.C.12. Feladat. *Ha két $l \neq k$, $l, k = 1, 2, \ldots, N$ jószágra*

$$\partial h_l(p,u) / \partial p_k \geqq 0,$$

akkor az l-edik jószágot a k-adik jószág helyettesítőjének mondjuk. Bizonyítsuk be, hogy minden jószágnak van legalább egy helyettesítője.

□ □ □

□ □ □

9.C.13. Feladat. *Ha két $l \neq k$, $l, k = 1, 2, \ldots, N$ jószágra*

$$\partial x_l\,(p, w)\,/\partial p_k \geqq 0,$$

akkor az l-edik jószágot a k-adik jószág általános helyettesítőjének mondjuk. Vajon igaz-e az az állítás, hogy minden jószágnak van legalább egy általános helyettesítője?

□ □ □

□ □ □

9.C.14. Feladat. *Legyenek a preferenciák* CES-*típusúak! Mi lesz a kiadási függvény alakja? A kompenzált keresleti függvényeké? Igazoljuk ebben a speciális esetben a* Shephard-*lemmát!*

□ □ □

10. fejezet

A (neo)klasszikus keresletelmélet alapjai (III)

Ebben a pontban tartjuk be korábbi ígéretünket, összehasonlítjuk és összekapcsoljuk a fogyasztó két, már ismert feladatát. A két feladatot egymás *duális feladat*ának nevezzük, mert – mint látni fogjuk – ugyanazt a viselkedést írják le (a nemlineáris programozás duális feladatainak segítségével), de más-más oldalról.

10.A. A fogyasztó duális feladatainak kapcsolata

Először azt a tételt látjuk be, ami a legjobban rávilágít a két feladat természetére, arra a tényre, hogy a két feladat egymásból származtatható, és ugyanahhoz a keresleti viselkedéshez vezet.

10.A.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy fennáll a 9.A.1. Feltevés! Ekkor igazak a következők:*

(i) ha $x^* \in x(p,w)$, akkor $x^* \in h(p,u(x^*))$, valamint $e(p,u(x^*)) = w$;

(ii) ha $x^* \in h(p,u)$, akkor $x^* \in x(p,px^*)$, valamint $v(p,px^*) = u$.

Bizonyítás: Indirekt módon bizonyítunk.
(i) Tegyük fel, $x^* \notin h(p,u(x^*))$. Ekkor létezik olyan x', amire $px' < px^* \leqq w$ és $u(x') \geqq u(x^*)$. A lokális telhetetlenséggel ekkor létezik x'', amire $px'' < px^* \leqq w$ és $u(x'') > u(x^*)$.Ez azonban ellentmond az $x^* \in x(p,w)$ tartalmazásnak. Ezek szerint a (KiadMF*) feladatban a minimális kiadás éppen px^*, ami a *Walras*-törvény alapján egyenlő a w értékkel.
(ii) Miután $u > u(0)$, ezért $x^* \neq 0$. Emiatt $px^* > 0$. Tegyük most fel, hogy $x^* \notin x(p,px^*)$. Ekkor létezik x', amire $px' \leqq px^*$, és $u(x') > u(x^*)$. Legyen most $x'' = \alpha x'$, ahol $\alpha \in (0,1)$. A hasznossági függvény folytonosságából, ha α

elég közel van egyhez, akkor $px'' < px' \leqq px^*$, és $u(x'') \geqq u(x^*)$. Ez ellentmond az $x^* \in h(p,u)$ tartalmzásnak. Eszerint $x^* \in x(p, px^*)$, és miután korábban beláttuk, hogy a (KiadMF*) optimumában a fogyasztónak nem keletkezik többlethaszna, ezért $v(p, px^*) = u(x^*) = u$. □

A két duális feladatból fontos és hasznos összefüggéseket vezethetünk le. Az első kettő ezek közül arra mutat rá, hogy rögzített p árvektor mellett a $v(p, \cdot)$ közvetett hasznossági függvény és az $e(p, \cdot)$ kiadási függvény egymás inverzei. Tudjuk ugyanis, hogy ha $x^* \in x(p,w)$, akkor $u(x^*) = v(p,w)$. Ennek alapján a 10.A.1. Tétel (i) pontjából

$$e(p, v(p,w)) = w. \tag{10.A–1}$$

Az is nyilvánvaló, hogy ha $x^* \in h(p,u)$, akkor $px^* = e(p,u)$. Ennek alapján pedig a 10.A.1. Tétel (ii) pontjából

$$v(p, e(p,u)) = u. \tag{10.A–2}$$

Hasonlóképpen:

$$h(p,u) = x(p, e(p,u)), \tag{10.A–3}$$

illetve

$$x(p,w) = h(p, v(p,w)). \tag{10.A–4}$$

□ □ □

10.A.2. Feladat. *Legyenek a preferenciák* CES-*típusúak! Lássuk be az (10.A–1) - (10.A–4) összefüggéseket erre a speciális esetre!*

□ □ □

□ □ □

10.A.3. Feladat. *Legyenek a preferenciák homotetikusak! Lássuk be, hogy az indirekt hasznossági függvény $v(p,w) = \varphi(p)\,w$ alakú! Igazoljuk azt is, hogy a kiadási függvény $e(p,u)) = \psi(p)\,u$ alakú!*

□ □ □

10.B. A Slutsky-egyenlet és a kompenzációk

Eddig az indirekt hasznossági függvény és a kiadási függvény, illetve a *walrasi* és a *hicksi* keresleti függvény kapcsolatát vizsgáltuk. A négy függvény közül az egyetlen, ami megfigyelhető adatokat tartalmaz az argumentumában és nem függ a hasznossági reprezentációtól, az a walrasi keresleti függvény. Vajon ezekből a megfigyelhető adatokból miképpen következtethetünk a többi függvényre? Azt gondolhatnánk, hogy erre a kérdésre a (10.A–3) összefüggés adja a választ, de rögtön láthatjuk, hogy sajnos ez nincs így, hiszen a benne szereplő kiadási függvény argumentumában is megjelenik a reprezentációtól függő hasznossági szint. Mielőtt azonban teljesen elvetnénk ezt az irányt, gondoljuk meg, mit is jelent ez az összefüggés. Az mondja, hogy a *hicksi* kereslet egyenlő a *walrasi* kereslettel, ha az esetleges árváltozás hatását mindig úgy *kompenzál*juk, hogy a fogyasztó továbbra is biztosítani tudja magának az eddigi hasznossági szintet. Innen ered a *kompenzált kereslet* kifejezés, és ezt a típusú kompenzációt *hicksi* kompenzációnak nevezzük. Vajon mi köze van ennek a kompenzációnak a már ismert *Slutsky-kompenzációhoz* (ahol úgy változott a jövedelem, hogy a fogyasztó mindig képes volt megvásárolni az eredeti fogyasztói kosarát)?

E kérdéskör legfőbb eredménye, a híres *Slutsky*-egyenlet, a *walrasi* és a (kompenzált) *hicksi* keresleti függvények deriváltja között teremt kapcsolatot, és fontos fogyasztói magatartási szabályokat implikál.

10.B.1. Tétel (Slutsky-egyenlet). *Ha fennáll a 9.A.1. Feltevés, és a* hicksi*, illetve* walrasi *keresleti függvények folytonosan differenciálhatók, akkor minden* (p, w) *párra és* $u = v(p, w)$ *értékre*

$$\frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_{n'}} = \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} x_{n'}(p,w) \qquad n, n' = 1, 2, \ldots, N\text{-re.}$$

Bizonyítás: A (10.A–1) egyenlőségből tudjuk, hogy egy tetszőleges (p, w) rögzített pár és $u = v(p, w)$ hasznossági szint mellett $w = e(p, u)$. A (10.A–3) összefüggés n-edik egyenletét az n'-edik ár szerint parciálisan deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_{n'}} = \frac{\partial x_n(p,e(p,u))}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p,e(p,u))}{\partial w}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_{n'}}.$$

A *Shephard*-lemmából tudjuk, hogy

$$\frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_{n'}} = \frac{\partial x_n(p,e(p,u))}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p,e(p,u))}{\partial w} h_{n'}(p,u).$$

Felhasználva a $w = e(p, u)$összefüggést,

$$\frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_{n'}} = \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} h_{n'}(p,u).$$

Ugyanakkor ismételten alkalmazva a (10.A–3) és a $w = e(p, u)$ összefüggést:

$$h_{n'}(p,u) = x_{n'}(p, e(p,u)) = x_{n'}(p,w),$$

amiből

$$\frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_{n'}} = \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial p_{n'}} + \frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} x_{n'}(p,w).$$

□

10.B.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy mivel a* Shephard-*lemmából tudjuk,*

$$h_n(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n},$$

ezért a fogyasztó preferenciáiból levezetett keresleti függvények esetén igaz a következő egyenlőség:

$$D_p^2 e(p,u) = S(p,w),$$

ahol S a már ismert helyettesítési *vagy* Slutsky-mátrix. *Erről korábban beláttuk, hogy amennyiben a* walrasi *keresleti függvények kielégítik a gyenge axiómát, akkor ez negatív szemidefinit mátrix, valamint $S(p,w)\,p = 0$. Akkor azonban az $N > 2$ esetben semmit sem tudtunk mondani a szimmetricitásáról. Ugyanakkor a haszonmaximalizálásból (kiadásminimalizálásból) a $D_p^2 e(p,u)$ mátrix szimmetricitását is levezettük. Ez azt mutatja, hogy a két modell nem ekvivalens, a döntési szerkezetre épített struktúra általánosabb, mint a racionális preferenciarendezésen alapuló.*

Egy kis disszkusszió helyénvalónak tűnik.

(i) Legyen $n = n'$. Ekkor az úgynevezett *sajátárhatás*ról beszélünk. A $D_p^2 e(p,u)$ mátrix negatív szemidefinitségéből tudjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 e(p,u)}{(\partial p_n)^2} = \frac{\partial h_n(p,u)}{\partial p_n} \leqq 0,$$

azaz a *hicksi* kompenzált keresleti görbe mindig negatív lejtésű.[15]

(ii) Ha az n-edik jószág normál jószág, akkor

$$\frac{\partial x_n(p,w)}{\partial w} > 0,$$

amiből az következik, hogy a hicksi kompenzáció nélkül egy árnövekedés esetén még jobban esne a keresett mennyiség ebből a jószágból, mint a kompenzáció mellett. Ez azt jelenti, hogy a *walrasi* keresleti függvény rugalmasabb, mint a (*hicksi*) kompenzált keresleti függvény.[16] Ha a jószág inferior, akkor ez fordítva van.

(iii) Érdemes a két kompenzáció nagyságáról is szót ejteni. Legyen az árváltozás

$$p' - p = \Delta p.$$

Tudjuk a Slutsky-kompenzáció ekkor

$$(w' - w)_S = \Delta w_S = \Delta p x(p,w) = p' x(p,w) - w,$$

[15] Ezt már korábban beláttuk a differenciálhatósági feltételek nélkül.
[16] Azaz a szokásos ábrán a *hicksi* keresleti függvény meredekebb.

ahol az utolsó egyenlőség a *Walras*-törvényből következik.

A *Hicks*-kompenzáció:

$$\Delta w_H = e(p', u) - e(p, u) = e(p', u) - w.$$

Ebből minden árváltozásra

$$\Delta w_S \geqq \Delta w_H,$$

hiszen

$$p' x(p, w) \geqq e(p', u)$$

a kiadási függvény definíciójából.[17]

Differenciális árváltozás esetében a két kompenzáció egyforma nagyságú, ugyanis:

$$dw_S = dpx(p, w)$$

ugyanakkor

$$dw_H = \sum_{n=1}^{N} dp_n \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_n} = \sum_{n=1}^{N} dp_n h_n(p, u) =$$

$$\sum_{n=1}^{N} dp_n x_n(p, e(p, u)) = \sum_{n=1}^{N} dp_n x_n(p, w) = dpx(p, w).$$

[17] Vegyük észre, ebben az érvelésben sehol nem használtuk a preferenciák konvexitását!

11. fejezet

Fejezetek a (neo)klasszikus keresletelméletből

Ebben a szakaszban néhány olyan témát említünk, amelyek később, normatív vagy empírikus vizsgálatainkban hasznunkra lehetnek. Az első pontban tovább elemezzük a döntési szerkezeten, illetve a preferenciarendezésen alapuló keresletelmélet kapcsolatát. A másodikban a jóléti elemzések alapjaival ismerkedünk meg, a harmadikban pedig a preferenciaaggregáció kérdéskörét tárgyaljuk.

11.A. Keresletből preferenciák

A korábbiakban láttuk, miképpen származtatjuk a fogyasztó racionális preferenciarendezéséből a keresleti viselkedést. Most arra keresünk választ, hogy amennyiben a fogyasztó keresleti viselkedését ismerjük (figyeltük meg), vajon találunk-e hozzá olyan (folytonos) racionális preferenciarendezést, amiből pontosan ezt a keresleti viselkedést származtathatnánk. Két egymástól kicsit különböző megközelítést vizsgálunk. Mind a kettő más és más feltételezésekkel él, más eszköztárat használ.

11.A.1. Az integrábilitási probléma

Feltesszük, hogy valamiképpen képesek voltunk megfigyelni[18] a fogyasztó keresleti *függvényét*, amiről feltesszük, hogy nullad fokon homogén, és kielégíti a Walras-törvényt. Az előbb feltett kérdésünkre adandó választ két részre bontjuk: a keresleti függvényből először egy kiadási függvényt származtatunk, majd abból preferenciarendezést (hasznossági függvényt).[19]

[18] Ne firtassuk most, hogyan is sikerülhetett.

[19] A tárgyalásunk meglehetősen pongyola lesz, több mindent nem bizonyítunk.

Keresletből kiadási függvény

Tudjuk, ha egy preferenciarendezésből származtatunk (egy kétszer folytonosan differenciálható) kiadási függvényt, akkor arra érvényes a *Shephard*-lemma és a fogyasztó duális feladataiból a kompenzált keresletre levezetett összefüggés, azaz az $n = 1, 2, \ldots, N$ jószágokra

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n} = h_n(p,u) = x_n(p, e(p,u)). \tag{11.A–1}$$

Rögzítsük most az u értékét az u^0szinten, és legyen egy kezdeti p^0 árvektor mellett

$$e\left(p^0, u^0\right) \triangleq e\left(p^0\right) = p^0 x\left(p^0, w^0\right) = w^0. \tag{11.A–2}$$

Ekkor a (11.A–1) egyenletrendszer nem más, mint egy, a (11.A–2) kezdeti érték melletti parciális differenciálegyenletrendszer. Ennek megoldása egyáltalán nem egyszerű feladat, és $N > 2$ esetben nem is mindig létezik.[20]

Tegyük most fel egy pillanatra, hogy mégis van megoldása, és legyen ez az $e(p) \triangleq e\left(p, u^0\right)$ függvény. Mit tudunk erről mondani? Annyit biztosan, hogy amenyiben kétszer folytonosan differenciálható, akkor a $D_p^2 e(p)$ *Hesse*-mátrix szimmetrikus. Erre a mátrixra azonban a (11.A–1) egyenlőségből igaz, hogy

$$D_p^2 e(p) = D_p x(p, e(p)) + D_w x(p, e(p))\, x(p, e(p))^T = S(p, e(p)),$$

azaz a megoldás szükséges feltétele, hogy az $x(p,w)$ keresleti függvényből származtatott $S(p,w)$ helyettesítési mátrix (*Slutsky*-mátrix) szimmetrikus legyen. A parciális differenciálegyenletek elméletében komoly szerepet játszó *Frobenius*-tétel ugyanakkor azt állítja, hogy ez a szimmetricitás a megoldás elégséges feltétele is egyben.

□ □ □

11.A.1. Feladat. *Lássuk be, hogy amennyiben $S(p,w)$ negatív szemidefinit, és a parciális differenciálegyenlet-rendszernek létezik $e(p)$ megoldása, akkor ez a megoldás a kiadási függvény minden tulajdonságával rendelkezik.*

□ □ □

Tudjuk, hogy $N = 2$ esetén a *Slutsky*-mátrix szükségképpen szimmetrikus. Ebből az következik, hogy két jószág esetén egy tetszőleges (folytonosan differenciálható) nullad fokon homogén, a *Walras*-törvényt és a a gyenge axiómát kielégítő keresleti függvényhez mindig találhatunk olyan függvényt, ami egy kiadási függvény tulajdonságaival rendelkezik. Ha $N > 2$, akkor ez csak abban az esetben igaz, ha a *Slutsky*-mátrix szimmetrikus.

[20] Ha $N = 2$, akkor akkor a keresleti függvény homogenitásából következik, hogy az egyik jószág árának szintjét megválaszthatjuk, így a parciális differenciálegyenlet-rendszer egy közönséges differenciálegyenletté válik, amit integrálással könnyen(?) meg tudunk oldani. Innen ered az *integrábilitási probléma* elnevezés.

Kiadási függvényből preferenciarendezés

Ezek után azt a kérdést kellene megválaszolnunk, hogy ha van egy függvényünk, ami rendelkezik egy kiadási függvény össze tulajdonságával, akkor találhatunk-e olyan racionális preferenciarendezést vagy egy azt reprezentáló hasznossági függvényt, amiből pont ezt a kiadási függvényt származtathatnánk. A támaszfüggvényről elmondottakat felidézve könnyen válaszolhatunk. A kiadási függvényről mondtuk, hogy az egy adott ponthoz tartozó „nem rosszabb, mint" halmaz, azaz a gyengén preferált halmaz támaszfüggvényének ellentettje. Azt is tudjuk, hogy a támaszfüggvényből visszanyerhetjük a halmazt (annak zárt konvex burkát). Erre alapozva intiutíve is belátható, hogy a feladatunk megoldható. Ezt a gondolatot formalizáljuk a továbbiakban.

11.A.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $e(p,u) : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton nő u-ban, valamint folytonos, monoton nő, első fokon homogén, konkáv és differenciálható p-ben. Tekintsük a következő halmazokat:*

$$V_u = \left\{x \in \mathbb{R}^N_+ \,|px \geqq e(p,u)\,,\ \forall p > 0\text{-ra}\right\}!$$

Ekkor

$$e(p,u) = \min\{px\,|x \in V_u,\ \forall p > 0\text{-ra}\}\,.$$

Bizonyítás: Könnyű belátni, hogy V_u nem üres, zárt és alulról korlátos halmaz. Miután $p > 0$, ezért azt is könnyen igazolhatjuk, hogy a vele vett skaláris szorzat felveszi a minimumát a V_u halmaz fölött és ez a minimumérték nem lehet kisebb, mint $e(p,u)$.Annyit kell belátnunk, hogy nagyobb sem lehet. Miután $e(p,u)$ konkáv az árakban, ezért tetszőleges két pozitív p és p' vektorra

$$e(p',u) \leqq e(p,u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n}(p'-p)_n\,.$$

Az *Euler*-tételt felhasználva ebből minden $p' > 0$-ra

$$e(p',u) \leqq \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n} p'_n.$$

A függvény monotonitásából minden $n = 1, 2, \ldots, N$-re

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n} \geqq 0,$$

ezért a parciális deriváltakból felépített vektor eleme a V_u halmaznak. Ebből az *Euler*-tétel ismételt felhasználásával kapjuk, hogy

$$\min\{px\,|x \in V_u,\ \} \leqq \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_n} p_n = e(p,u)\,.$$

□

□ □ □

11.A.3. Feladat. *Legyen* $u : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ *a következő:*

$$u(x) = \max\{u \in \mathbb{R}\,|x \in V_u\}.$$

Lássuk be, hogy ekkor u *monoton nő, folytonos és kvázikonkáv, valamint* $e(p, u)$ *az* u *hasznossági függvényhez tartozó kiadási függvény.*

□ □ □

Az eddigi eredményeinket összerakva tehát azt kapjuk, hogy több mint két jószág esetén egy tetszőleges (folytonosan differenciálható), nullad fokon homogén, a *Walras*-törvényt és a a gyenge axiómát kielégítő keresleti függvényt akkor és csak akkor racionalizálhatunk, ha a *Slutsky*-mátrixa szimmetrikus. Ekkor nem csak racionalizálható a kereslet, hanem található hozzá folytonos, monoton növő, kvázikonkáv hasznossági függvény is. Ebből az is következik, hogy a fogyasztói viselkedés két modellje nem ekvivalens. A döntési szerkezeten alapuló modell általánosabb, hiszen a haszonmaximalizálás egyaránt implikálja a gyenge axiómát, (azaz a helyettesítési mátrix negatív szemidefinitségét), valamint a *Slutsky*-mátrix szimmetricitását, de a gyenge axióma nem implikálja a szimmetricitást.

11.A.2. A kinyilvánított preferencia erős axiómája

Az integrábilitási probléma megoldása döntő módon függ a megfigyelt keresleti függvény differenciálhatóságától. Ez persze „kellemes” tulajdonság, könnyebbé teszi az elemzést, de erősen kérdéses, hogy megfigyelt adataink lehetővé teszik-e alkalmazását. Ebben a pontban egy másik feltételt vizsgálunk meg, ami – látszólag – nem igényli még csak a folytonosságot sem.

A feltétel jellegét tekintve olyan mint a gyenge axióma. Erről tudjuk, hogy bár a racionalizálhatóság szükséges feltétele, a *Walras*-törvénnyel és a nullad fokú homogenitással karöltve sem elégséges a racionalizálhatósághoz. Vajon létezik-e ilyen szükséges és elégséges feltétel? A válasz pozitív. Mi most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a keresleti viselkedést függvénnyel tudjuk leírni.[21]

11.A.4. Definíció. *A fogyasztó* $x(p, w)$ *keresleti függvénye kielégíti a* kinyilvánított preferencia erős aximómáját *(a SARP-ot), ha tetszőleges*

$$\left(p^1, w^1\right), \left(p^2, w^2\right), \ldots, \left(p^L, w^L\right)$$

[21] Abban az esetben, amikor a költségvetési halmazok mellett a fogyasztó választása többértékű lehet, tehát amikor $x(p, w)$ pont-halmaz leképezés, a most ismertetendő feltételünk általánosítása szolgáltatja a megoldást. Az erre vonatkozó alapvető-tétel az úgynevezett *Afriat*-tétel, amit e helyütt azért nem tárgyalunk, mert logikájában és az alkalmazott matematikai eszköztárában eltér a tárgyalásunk menetétől. Később azonban egy megjegyzés erejéig még hivatkozunk rá.

párokra, amelyekre minden $l = 1, 2, \ldots, L-1$ esetén

$$\left(p^l, w^l\right) \neq \left(p^{l+1}, w^{l+1}\right) \text{ és } p^l x\left(p^{l+1}, w^{l+1}\right) \leqq w^l,$$

fennáll, hogy

$$p^L x\left(p^1, w^1\right) > w^L.$$

Szavakkal kifejezve ez annyit jelent,hogy ha egy $x\left(p^1, w^1\right)$ fogyasztási vektort a fogyasztó *közvetlenül vagy közvetve preferált*nak nyilvánított az $x\left(p^L, w^L\right)$ vektorhoz képest, akkor ez utóbbi nem nyilváníthatja közvetlenül preferáltnak az előzőhöz képest.

Azonnal látható, hogy amennyiben $x(p, w)$ kielégíti a kinyilvánított preferencia erős aximómáját, akkor a gyenge axiómát is kielégíti. A következő eredmény kicsit nehezebb. Annyira azonban mégsem komplikált, hogy ne lehessen feladatul adni az igazolását.

□ □ □

11.A.5. Feladat. *Legyen az $x(p, w)$ keresleti függvény a fogyasztó (HMF) feladatából levezethető. Lássuk be, hogy ekkor szükségképpen kielégíti a SARP-ot.*

□ □ □

A következő tétel rámutat arra, miért is jó, ha egy keresleti függvényünk eleget tesz az erős axiómának.

11.A.6. Tétel. *Ha egy $x(p, w)$ keresleti függvény kielégíti a kinyilvánított preferencia erős axiómáját, akkor létezik olyan $\succsim$ racionális preferenciarendezés, ami racionalizálja, azaz minden (p, w) párra, amennyiben $x(p, w) \neq y \in B(p, w)$, akkor*

$$x(p, w) \succ y.$$

Bizonyítás: A bizonyítás végső soron halmazelméleti alapon, a *Zorn*-lemmán (vagy a *Zermelo*-tételen) alapszik, közvetlen matematikai előzménye a *Szpilrajn*-tétel, ami szerint minden $\succ$ parciális rendezésnek (azaz tranzitív és irreflexív relációnak) létezik olyan tranzitív, irreflexív $\succ^*$ kitejesztése, amelyre (i) $[x \succ y] \Longrightarrow [x \succ^* y]$ és (ii) ha $x \neq y$, akkor vagy $x \succ^* y$, vagy $y \succ^* x$.

Lássuk ezután a bizonyítást! Legyen $\succ^1$ a következő reláció: $x \succ^1 y$, ha $x \neq y$ és $x = x(p, w)$,valamint $py \leqq w$ valamely (p, w) párra. Ennek segítségével definiáljuk a következő $\succ^2$ relációt:

$$x \succ^2 y, \text{ ha létezik } x = x^1 \succ^1 x^2 \succ^1 \ldots \succ^1 x^L = y$$

lánc. Ez a $\succ^2$ reláció nyilván tranzitív és a SARP miatt irreflexív. A *Szpilrajn*-tétel miatt ennek létezik a kívánt tulajdonságú $\succ^*$ kitejesztése. Ennek segítségével definiálhatjuk most már a keresett $\succsim$ relációt:

$$x \succsim y, \text{ ha vagy } x = y, \text{ vagy } x \succ^* y.$$

Erről a legutolsó relációról könnyű belátni, hogy racionális és hogy

$$x(p,w) \succ y,$$

amennyiben $x(p,w) \neq y \in B(p,w)$. □

□ □ □

11.A.7. Feladat. *Lássuk be, hogy amennyiben $N = 2$ és az $x(p,w)$ reguláris keresleti függvény folytonosan differenciálható, akkor a WARP és a SARP ekvivalens.*[22]

□ □ □

A 11.A.6. Tételből az is következik, hogy amennyiben $N > 2$, akkor a SARP-ot kielégítő kereslet esetén a fogyasztó keresleti szerkezetén alapuló modell és a haszonmaximalizálási modell ekvivalens.[23] Amennyiben azonban a keresleti függvény nem elégíti ki az erős axiómát, akkor ismét azt mondhatjuk, hogy a döntési szerkezeten alapuló modell általánosabb.

Végezetül még egy megjegyzés. A korábban lábjegyzetben említett *Afriat*-tétel, azzal az esettel foglalkozik, amikor véges sok $x^l\left(p^l, w^l\right)$ megfigyelésünk van. Számunkra ez két szempontból érdekes. Egyrészt megfigyelni úgyis csak véges sok pontot tudunk, ezért empírikus vizsgálatokban alkalmazható az állítás, másrészt a tételből az is következik, hogy amennyiben e megfigyelések kielégítik az erős axiómát, akkor létezik olyan folytonos, monoton növekvő, konkáv hasznossági függvény, ami a lokálisan telhetetlen fogyasztó preferenciáit reprezetálja, és amiből származtatott keresleti viselkedés konzisztens a megfigyelésekkel.

11.B. Jóléti elemzés

A fogyasztó haszonmaximalizáló modellje – mint láttuk – restriktívebb, mint a keresleti (döntési) függvényen alapuló elmélet. Mi indokolja akkor a használatát az esetleges technikai könnyebbségeken kívül? A normatív elmélet, a jólét elemzése. A keresleti szerkezet ugyanis képtelen arra, hogy a gazdaságban bekövetkezett változások hatásait a fogyasztó jólétére vonatkozóan értékelje. Lássunk egy példát egy ilyen jóléti elemzésre!

[22] Az állítás akkor is igaz, ha nem feltételezzük a folytonos differenciálhatóságot, csak akkor sokkal nehezebb bizonyítani.

[23] Nem differenciálható kereslet mellett ez az állítás sem igazolható olyan egyszerűen. Be kell látni ugyanis azt is, hogy a keresletből kapott preferenciarendezés folytonos és a fogyasztó lokálisan telhetetlen.

11.B.1. A modell

Tegyük fel a továbbiakban, hogy a fogyasztó lokálisan telhetetlen, preferenciái racionálisak és folytonosak. Azt is feltesszük, amikor erre szükség lesz, hogy a fogyasztó indirekt hasznossági függvénye és kiadási függvény folytonosan differenciálható.

Legyen a fogyasztó vagyona $w > 0$, és változzon a p^0 árvektor a p^1 értékre! Miképpen változik a fogyasztó jóléte (hasznossága)? A kérdésre a válasz egyszerű, de ugyanakkor korántsem egyértelmű. Ha ismerjük a fogyasztó preferenciarendezését, akkor származtathatjuk belőle az $u : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvényét és a $v : \mathbb{R}^N_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvényét. Nincs más dolgunk, hogy megnézzük, miképpen alakul a

$$v\left(p^1, w\right) - v\left(p^0, w\right)$$

érték. Ha ez pozitív, akkor a fogyasztó jól járt, ha negatív akkor rosszul. Csak az marad a kérdés, hogy ez a különbség mennyiben függ a konkrét u reprezentációtól. Természetesen, alapvető mértékben. Miután minden reprezentáció ugyanazokat a preferenciákat írja le, a fogyasztó tényleges jóérzete nem függ a reprezentációtól, de a kapott különbség igen. Ezen sajnos nem tudunk segíteni, de talán annyit tehetünk, hogy olyan reprezentációt választunk, ami *pénzben méri* a változást, mert ekkor adhatunk olyan interpretációt a szóban forgó hasznosságkülönbségnek, ami arra kérdésre válaszol, hogy „mennyit ér meg” a fogyasztónak a változás.

11.B.2. A pénzben mért hasznosság

Rögzítsünk ezért most egy adott u reprezentációt, és legyen az ehhez tartozó indirekt hasznossági függvény $v(\cdot,\cdot)$. Tekintsünk egy tetszőleges $\bar{p} > 0$ árvektort és ennek alapján az $e(\bar{p}, v(p,w))$ kiadási függvényt. Ez nyilván azt a minimális vagyont, jövedelmet adja, ami a fogyasztó számára a $\bar{p}$ árvektor mellett a $v(p,w)$ haszonszint elérését lehetővé teszi. Miután a kiadási függvény tulajdonságaiból tudjuk, hogy az eredeti indirekt hasznossági függvény szigorúan monoton (pozitív) transzformációja, ezért maga is egy „legitim” indirekt hasznossági függvény, és a hasznosságkülönbséget pénzben méri. Azt is vegyük észre, hogy ez az

$$e\left(\bar{p}, v\left(p^1, w\right)\right) - e\left(\bar{p}, v\left(p^0, w\right)\right)$$

hasznosságkülönbség, egyben pénzösszeg – bármilyen meglepő is ez – egyáltalán nem függ az eredetileg rögzített u reprezentációtól, csak a preferenciáktól. Sajnálatos módon azonban nagyon is függ a választott $\bar{p}$ árrendszertől. Éppen ezért alaposan meg kell gondolnunk, milyen árrendszert választunk referenciaárként.

11.B.3. Az ekvivalens és a kompenzációs változás

A referencia-árrendszerre két természetes választás adódik, az eredeti p^0, és az új p^1 árrendszer. Ezeken alapulva két korábbról jól ismert jóléti mértéket vezethetünk be, az *ekvivalens* és a *kompenzációs változást.* Vezessük be a következő jelöléseket! Legyen $u^0 = v\left(p^0, w\right)$ és $u^1 = v\left(p^1, w\right)$. A *Walras*-törvényből tudjuk, hogy $e\left(p^0, u^0\right) = e\left(p^1, u^1\right) = w$.

11.B.1. Definíció. *Ha az árrendszer p^0-ról p^1-re változik akkor e változáshoz tartozó* ekvialens változás *a következő:*

$$EV\left(p^0, p^1, w\right) = e\left(p^0, u^1\right) - e\left(p^0, u^0\right) = e\left(p^0, u^1\right) - w.$$

Az árváltozáshoz tartozó kompenzációs változás*:*

$$CV\left(p^0, p^1, w\right) = e\left(p^1, u^1\right) - e\left(p^1, u^0\right) = w - e\left(p^1, u^0\right).$$

Szavakban: az ekvivalens változás nem más, mint az a jövedelemváltozás, amit a fogyasztó „ugyanúgy értékel", mint az árváltozást, azaz amit éppen elfogad az árváltozás *helyett*. A kompenzációs változás pedig nem más, mint annak a nettó összegnek az *ellentéte*, amit a fogyasztó éppen elfogad a *megvalósult* árváltozásért *cserébe*.

11.B.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, az EV és a CV előjeles nagyság. Ha a fogyasztó helyzete romlik az árváltozás bekövetkeztekor, akkor – miután mind a kettő legitim indirekt hasznossági függvény – szükségképpen mind a kettő egy irányba mutat, negatív. Ha a fogyasztó helyzete javul, akkor mind a kettő pozitív.*[24]

□ □ □

11.B.3. Feladat. *Lássuk be, hogy az ekvivalens és a kompenzációs változást felírhatjuk a következő alternatív fomákban:*

$$\begin{aligned} v\left(p^0, w + EV\right) &= u^1, \\ v\left(p^1, w - CV\right) &= u^0. \end{aligned}$$

□ □ □

Tegyük most fel, hogy $p^0 = \left(p_1^0, \bar{p}_{-1}\right)$, és $p^1 = \left(p_1^1, \bar{p}_{-1}\right)$, valamint azt, hogy $h(p, u)$ a fogyasztó kompenzált keresleti függvénye. Ekkor a *Shepard*-lemmából tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} EV\left(p^0, p^1, w\right) &= e\left(p^0, u^1\right) - w = \\ = e\left(p^0, u^1\right) - e\left(p^1, u^1\right) &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1\left(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1\right) dp_1, \end{aligned}$$

[24]Ezért kell ilyen bonyolult módon megfogalmazni szavakban a kompenzációs változást. Ha nem ügyelünk erre, akkor komoly problémába ütközünk, ha a kettőt össze szeretnénk hasonlítani.

valamint

$$\begin{aligned} CV\left(p^0, p^1, w\right) &= w - e\left(p^1, u^0\right) = \\ = e\left(p^0, u^0\right) - e\left(p^1, u^0\right) &= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1\left(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0\right) dp_1. \end{aligned}$$

□ □ □

11.B.4. Feladat. *Tegyük fel, csak két jószág van és csak az első jószág ára változik! Lássuk be, hogy ha az első jószág normál, akkor $EV > CV$, ha inferior, akkor $CV > EV$. Lássuk be azt is, hogy amennyiben a preferenciák kvázilineárisak, akkor $EV = CV$.*

□ □ □

Végezetül egy fontos momentumra hívjuk fel a figyelmet. Ha több árváltozást hatását szeretnénk összehasonlítani, akkor azt mindig az ekvivalens változás alapján tegyük. Tegyük fel ugyanis, hogy az eredeti p^0 árvektor az egyik esetben p^1-re, a másik esetben p^2-re változik. Ebben az esetben a fogyasztó számára a p^1 árrendszer akkor és csak akkor jobb, mint p^2, ha $EV\left(p^0, p^1, w\right) > EV\left(p^0, p^2, w\right)$,hiszen

$$EV\left(p^0, p^1, w\right) - EV\left(p^0, p^2, w\right) = e\left(p^0, u^1\right) - e\left(p^0, u^2\right),$$

azaz az ekvivalens változás nem csak az eredeti árvektor melletti fogyasztói jólétet hasonlítja össze az árváltozások utánival, hanem az árváltozások egymás közötti haszonkülönbségét is mérhetjük vele. A kompenzációs változással nem ez a helyzet, mert

$$CV\left(p^0, p^1, w\right) - CV\left(p^0, p^2, w\right) = e\left(p^2, u^0\right) - e\left(p^1, u^0\right),$$

így a különbségnek nincs jóléti tartalma, rossz sorrendet adhat. Az ekvivalens változás legitim indirekt hasznossági függvény, a kompenzációs változás nem az.

11.C. Aggregált kereslet

Jogosan merülhet fel a kérdés: miután empírikus vizsgálatokban egyéni keresleti függvényekre vonatkozó adatok egyáltalán nem vagy nehezen beszerezhetők[25] és emiatt további elemzésekre az egyéni keresleti függvényeket használni nem tudjuk, vajon egy megfigyelhető *aggregált* keresleti függvény mennyiben viseli magán a háttérben meghúzódó egyéni keresleti függvények tulajdonságait? Tekinthető egy

[25] Nem beszélve a prefereciákra vonatkozó adatokról!

ilyen aggregált keresleti függvény úgy, mint egy reprezentatív fogyasztó viselkedésének, döntésének következménye? Alapozhatunk-e egyáltalán bármiféle jóléti vizsgálatot egy ilyen aggregált függvényre? Ezekre a kérdésekre nem egyszerű a válasz. Csak néhány eredményt ismertetünk, röviden és nem túl alaposan.

11.C.1. Aggregált kereslet és aggregált vagyon (jövedelem)

Tegyük fel, hogy az összes $i = 1, 2, \dots, I$ fogyasztónak létezik racionális preferenciarendezése, és ezek alapján származtathatók az $x_i(p, w_i)$ egyedi keresleti függvények. Ekkor az aggregált keresletet a következőképpen definiálhatjuk:

$$x(p, w_1, w_2, \dots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, w_i).$$

Látható tehát, hogy az aggregált kereslet nem csak az áraktól és az összvagyontól (összjövedelemtől), hanem az egész *jövedelemeloszlástól* is függ. Vajon mikor élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy az aggregált kereslet csak az *aggregált* jövedelem függvénye és nem az eloszlásé? Nyilván csak akkor, ha tetszőleges $(w_1, w_2, \dots, w_I)$ és $(w_1', w_2', \dots, w_I')$ párra, amire $\sum_{i=1}^{I} w_i = \sum_{i=1}^{I} w_i'$,

$$\sum_{i=1}^{I} x_i(p, w_i) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, w_i'). \qquad (11.C–1)$$

Induljunk ki egy teszőleges kezdeti $(w_1, w_2, \dots, w_I)$ jövedelemeloszlásból, és legyen a differenciális változás $(dw_1, dw_2, \dots, dw_I) \in \mathbb{R}^I$, valamint

$$\sum_{i=1}^{I} dw_i = 0.$$

Ha feltesszük a keresleti függvények differenciálhatóságát, akkor (11.C–1)-ból kapjuk, hogy[26]

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_i^n(p, w_i)}{\partial w_i} dw_i = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N\text{-re.}$$

Ez utóbbi akkor és csak akkor lehet igaz minden kezdeti jövedelemeloszlásra és minden újraelosztásra, ha

$$\frac{\partial x_i^n(p, w_i)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_{i'}^n(p, w_{i'})}{\partial w_{i'}} \qquad (11.C–2)$$

$\forall n = 1, 2, \dots, N$-re, és $\forall i, i'$-re, valamint minden $(w_1, w_2, \dots, w_I)$ jövedelemeloszlásra. Szigorúan szólva ez lokális eredmény, ezért nem foglalkoztunk a határponti

[26] Itt a felső index a szóban forgó jószágra vonatkozik.

megoldásokkal, ahol ezeknek nem feltételnül szükséges teljesülniük. Ez láthatóan azt jelenti, hogy a jövedelemajánlati-görbék *párhuzamos (fél)egyenesek*.

□ □ □

11.C.1. Feladat. *Mutassuk meg, hogy amennyiben minden fogyasztó preferenciái ugyanazok és homotetikusak, akkor a jövedelemajánlati-görbéik párhuzamos (fél)egyenesek!*
Hasonlóképpen mutassuk meg, hogy amennyiben minden fogyasztó preferenciái akár különbözőek, de (az N-edik jószágban) kvázilineárisak, akkor is.

□ □ □

A következő állítás, ami csak belsőponti megoldásokra igaz, és amit csak egy irányban bizonyítunk, teljes karakterizációt ad a megfelelő preferenciatípusokra.

11.C.2. Tétel. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden fogyasztóra és minden (p, w_i) párra a belsőponti megoldásokra vonatkozó jövedelemajánlati-görbék párhuzamosak legyenek, az az, hogy az indirekt hasznossági függvényeik az úgynevezett* Gorman*-formájúak, azaz $\forall i$-re fennálljon a*

$$v_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p)\, w_i$$

egyenlőség.

11.C.3. Megjegyzés. *Feltétlenül vegyük észre, hogy a vagyon (jövedelem) $b(p)$ szorzója minden fogyasztóra ugyanaz!*

Bizonyítás: Elégségesség: A *Roy*-azonsságot használjuk. Minden $n = 1, 2, \ldots, N$-re és $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$x_i^n(p, w_i) = -\frac{\partial v_i(p, w_i)/\partial p_n}{\partial v_i(p, w_i)/\partial w_i} = -\frac{\partial a_i(p)/\partial p_n}{b(p)} - \frac{\partial b(p)/\partial p_n}{b(p)} w_i,$$

amiből

$$\frac{x_i^n(p, w_i)}{\partial w_i} = -\frac{\partial b(p)/\partial p_n}{b(p)}.$$

A jobboldal pedig független mind i-től, mind w_i-től, azaz a (11.C–2) egyenlőségek igazak minden $n = 1, 2, \ldots, N$-re és $i = 1, 2, \ldots, I$-re. □

Látható, hogy ekkor az aggregált

$$x(p, w_1, w_2, \ldots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, w_i)$$

kereslet csak a $\sum_{i=1}^{I} w_i$ összjövedelemtől függ, ugyanis $\forall n = 1, 2, \ldots, N$-re

$$x_i^n (p, w_i) = -\frac{\partial a_i (p) / \partial p_n}{b (p)} - \frac{\partial b (p) / \partial p_n}{b (p)} w_i = \alpha_i^n (p) + \beta^n (p) w_i,$$

amit a fogyasztókra összegezve:

$$x^n (p, w_1, w_2, \ldots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^n (p) + \beta^n (p) \sum_{i=1}^{I} w_i. \tag{11.C–3}$$

□ □ □

11.C.4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a (11.C–3) aggregált kereslet egy olyan (reprezentatív) fogyasztó kereslete, akinek indirekt hasznossági függvénye*

$$v(p, \sum_{i=1}^{I} w_i) = \sum_{i=1}^{I} a_i (p) + b (p) \sum_{i=1}^{I} w_i!$$

□ □ □

□ □ □

11.C.5. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy* Gorman-*formájú indirekt hasznossági függvénnyel bíró fogyasztó kiadási függvénye*

$$e (p, u) = c_i (p) + d (p) u$$

alakú.

□ □ □

□ □ □

11.C.6. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a homotetikus, illetve kvázilineáris preferenciákhoz tartozó indirekt hasznossági függvények* Gorman-*formájúak.*

□ □ □

11.C.2. Az aggregált kereslet és a gyenge axióma

Ebben a pontban végig feltételezzük egy $\varphi : \mathbb{R}_{++}^N \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}^I$ jövedelemelosztási szabály létezését, amely minden (p, w) párhoz egy olyan $(w_1, w_2, \ldots, w_I)$ jövedelemeloszlást rendel, amire

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i (p, w) = \sum_{i=1}^{I} w_i = w.$$

Ekkor az aggregált kereslet triviális módon az aggregált jövedelem függvénye. A továbbiakban – szűkítve az általánosságot, de egyszerűsítve a vizsgálatot – azt is feltesszük, hogy $\forall i$-re és $\forall w$-re

$$\varphi_i(p,w)=\alpha_i w, \quad \alpha_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{I}\alpha_i=1.$$

Ekkor nyilván

$$x(p,w)=\sum_{i=1}^{I}x_i(p,\alpha_i w).$$

□ □ □

11.C.7. Feladat. *Lássuk be, hogy amennyiben minden fogyasztóra az $x_i(p,w_i)$ keresleti függvények folytonosak, nullad fokon homogének és kielégítik a* Walras-*törvényt, akkor az aggregált keresleti függvény is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal!*

□ □ □

Sajnos a gyenge axiómával nem ez a helyzet: nem feltétlenül őrződik meg az aggregálásnál, amint azt a következő példa is mutatja.

11.C.8. Példa. *Legyen $N=2$, $I=2$, $p^1=(2,1)$, $p^2=(1,2)$, $w_1=20$, $w_2=20$, valamint*

$$\begin{aligned}
x_1\left(p^1,w_1\right) &= (6;8)\\
x_1\left(p^2,w_1\right) &= (2;9)\\
x_2\left(p^1,w_2\right) &= (9;2)\\
x_2\left(p^2,w_2\right) &= (8;6).
\end{aligned}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ezek az egyéni keresletek kielégítik a gyenge axiómát, de az

$$x\left(p^1,w_1+w_2\right)=(15;10), \quad x\left(p^2,w_1+w_2\right)=(10;15)$$

aggregált keresletek nem. □

Mi okozza a problémát a gyenge axiómával az aggregáláskor? A jövedelmi hatások. Nézzük meg ezt kicsit közelebbről! Tudjuk, a gyenge axióma fennállása ekvivalens a kompenzált kereslet törvényének a teljesülésével. Addig nincs gond, amíg egy

$$p\to p', \quad w'=p'x(p,w)$$

kompenzált árváltozás minden egyéni kereslet esetében is kompenzált. Ekkor ugyanis ha $\forall i$-re,

$$\alpha_i w' = p' x_i (p, \alpha_i w),$$

akkor ismét $\forall i$-re

$$(p' - p)(x_i (p', \alpha_i w') - x_i (p, \alpha_i w)) \leqq 0, \quad < 0, \text{ ha } x_i (p', \alpha_i w') \neq x_i (p, \alpha_i w).$$

Amennyiben ezeket i szerint összegezzük, kapjuk, hogy

$$(p' - p)(x (p', w') - x (p, w)) \leqq 0, \quad < 0, \text{ ha } x (p', w') \neq x_i (p, w),$$

azaz az aggregált keresletre is érvényes a kompenzált kereslet törvénye és így a gyenge axióma. Ugyanakkor azonban, ha egy árváltozás kompenzált az aggregált keresletre vonatkozólag, nem biztos, hogy az az egyéni keresletekben is. Elképzelhető, hogy néhány i-re

$$\alpha_i w' \neq p' x_i (p, \alpha_i w),$$

emiatt ezekre a a fogyasztókra nem lehetetlen, hogy a

$$(p' - p)(x_i (p', \alpha_i w') - x_i (p, \alpha_i w)) > 0$$

reláció igaz. Ekkor a fogyasztókra történő összegzés nem feltétlenül vezet a kívánt eredményre, a jövedelmi hatások elszórakoztak velünk. Ha pedig íly módon a kompenzált kereslet törvénye nem áll fenn az aggregált keresletre, akkor a gyenge axióma sem igaz rá.

Az elmondottakból következően arra van szükség, hogy az egyéni preferenciák, illetve az ezekből levezetett keresletek szintjén találjunk olyan feltételt, amely nemcsak, hogy triviálisan biztosítja a gyenge axióma teljesülését egyéni szinten, de azt is garantálja, hogy ez az aggregálás után is megmarad. E célból bevezetjük a *nem kompenzált kereslet törvényét.*

11.C.9. Definíció. *A nullad fokon homogén és a Walras-törvényt kielégítő $x(p, w)$ keresleti függvény akkor és csak akkor elégíti ki a* nem kompenzált kereslet törvényét *is, ha tetszőleges $p \to p'$ árváltozásra és w jövedelemre igaz a*

$$(p' - p)(x (p', w) - x (p, w)) \leqq 0, \quad < 0, \text{ ha } x (p', w) \neq x (p, w)$$

reláció.

11.C.10. Segédtétel. *A nullad fokon homogén , a Walras-törvényt és a nem kompenzált kereslet törvényét kielégítő $x(p, w)$ keresleti függvényre igaz a gyenge axióma.*

Bizonyítás: Tekintsünk két tetszőleges (p, w) és (p', w') ár-jövedelem párt, és tegyük fel, hogy az ezekhez tartozó keresletekre igaz, hogy $x(p, w) \neq x(p', w')$, valamint

$$px (p', w') \leqq w.$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$p'x(p,w) > w'.$$

Legyen

$$p'' = \frac{w}{w'}p'.$$

Ekkor a nullad fokú homogenitással kapjuk, hogy $x(p'',w) = x(p',w')$. Ekkor – miután a keresleti függvény kielégíti a nem kompenzált kereslet törvényét – igaz, hogy

$$(p''-p)(x(p'',w) - x(p,w)) < 0,$$

hiszen $x(p'',w) \neq x(p,w)$. Kibontva:

$$p''x(p'',w) - p''x(p,w) - px(p'',w) + px(p,w) < 0.$$

Átrendezve:

$$p''x(p'',w) - px(p'',w) - p''x(p,w) + px(p,w) < 0.$$

Az első két tag összege biztos nem negatív, hiszen a Walras-törvényből és a kezdeti feltételünkből

$$p''x(p'',w) - px(p'',w) = w - px(p'',w) \geqq 0.$$

Emiatt

$$px(p,w) - p''x(p,w) = w - p''x(p,w) < 0$$

szükségképpen. Ha a nagyságrendi reláció mind a két oldalát beszorozzuk a $w'/w > 0$ skalárral, akkor kapjuk, hogy

$$w' - p'x(p,w) < 0,$$

és ez pont az, amit bizonyítanunk kellett. □

Könnyű belátni, hogy a nem kompenzált kereslet törvénye, szemben a gyenge axiómával ekvivalens kompenzált kereslet törvényével, már aggregálódik.

11.C.11. Tétel. *Ha minden $i = 1, 2, \ldots, I$-re az $x_i(p, w_i)$ egyéni keresleti függvények kielégítik a nem kompenzált kereslet törvényét, akkor az*

$$x(p,w) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, \alpha_i w)$$

aggregált keresleti függvény is.

Bizonyítás: Tekintsünk két tetszőleges p, p' árvektort és w jövedelmet, valamint tegyük fel, hogy az ezekhez tartozó keresletekre igaz, hogy $x(p,w) \neq x(p',w)$. Ekkor legalább egy i'-re

$$x_{i'}(p, \alpha_{i'} w) \neq x_{i'}(p', \alpha_{i'} w).$$

Ha ezek után a minden i-re igaz

$$(p' - p)(x_i(p', \alpha_i w) - x_i(p, \alpha_i w)) \leqq 0, \quad < 0, \text{ ha } x_i(p', \alpha_i w) \neq x_i(p, \alpha_i w)$$

összefüggéseket a fogyasztókra összegezzük, akkor

$$(p' - p)(x(p', w) - x(p, w)) < 0.$$

□

Ha az árváltozások „kicsik”, akkor a nem kompenzált kereslet törvényét az alábbi, általunk most nem bizonyított állításokkal jellemezhetjük:[27]

11.C.12. Tétel. *Ha egy $x(p,w)$ keresleti függvény kielégíti a nem kompenzált kereslet törvényét, akkor $\mathrm{D}_p x(p,w)$ mátrix negatív szemidefinit, azaz minden $\mathrm{d}p$ árváltozásra*

$$\mathrm{d}p \mathrm{D}_p x(p,w)\, \mathrm{d}p \leqq 0.$$

Ha egy $x(p,w)$ keresleti függvényre minden p pontban a $\mathrm{D}_p x(p,w)$ mátrix negatív definit, akkor $x(p,w)$ kielégíti a nem kompenzált kereslet törvényét.

Végezetül illusztrációképpen nézzük meg, hogy ha a preferenciarendezés homotetikus, akkor a belőle levezetett keresleti függvény kielégíti a nem kompenzált kereslet törvényét.

11.C.13. Tétel. *Ha a kétszer folytonosan differenciálható hasznossági függvénnyel reprezentálható $\succsim$ preferenciarendezés homotetikus (és a hozzá tartozó kiadási függvény kétszer folytonosan differenciálható), akkor a belőle levezett (differenciálható) $x(p,w)$ keresleti függvény kielégíti a nem kompenzált kereslet törvényét.*

Bizonyítás: Az S helyettesítési mátrix definíciójából

$$D_p x(p,w) = S(p,w) - D_w x(p,w)\, x(p,w)^T.$$

A Slutsky-azonosságból tudjuk, hogy

$$S(p,w) = D_p^2 e(p,u).$$

[27] Az állítások közül az elsőt egyszerű és érdemes belátni.

Ez utóbbi mátrix rangja $N-1$, ezért

$$dpS\left(p,w\right)dp<0$$

valahányszor dp nem arányos a p vektorral. Ha arányos, akkor

$$dpS\left(p,w\right)dp=0$$

A preferenciák homotetikusságából következik, hogy[28]

$$D_w x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T=\frac{1}{w}x\left(p,w\right)x\left(p,w\right)^T.$$

Ha ezt balról, jobbról beszorozzuk a dp vektorral, akkor

$$\frac{1}{w}\left[dpx\left(p,w\right)\right]^2>0,$$

amennyiben $dpx\left(p,w\right)\neq 0$. A *Walras*-törvényből azonban következik, hogy ha dp arányos a p vektorral ($dp=\alpha p$, $\alpha>0$), akkor $dpx\left(p,w\right)$ nem lehet zérus. Ezek szerint a $D_p x\left(p,w\right)$ mátrix minden árváltozásra negatív definit, és így a 11.C.12. Tétel adja a kívánt eredményt. □

□ □ □

11.C.14. Feladat. *Legyen* $u\left(x_1,x_2\right)=\min\left\{x_1,x_2\right\}$. *Ez homotetikus preferenciákat reprezentáló hasznossági függvény, de nem differenciálható, emiatt nem alkalmazható közvetlenül a 11.C.13. Tétel.*[29] *Lássuk be, hogy az ezekből a preferenciákból származtatott keresleti függvény is kielégíti a nem kompenzált kereslet törvényét!*

□ □ □

[28] A *Roy*-azonosság segítségével lássuk is ezt be!

[29] Az S helyettesítési mátrix zérus ebben az esetben.

12. fejezet

Az egyéni döntések bizonytalanság mellett

Az eddigi vizsgálatainkban azzal az – eddig szemérmesen elhallgatott – feltételezéssel éltünk, hogy bármit teszünk is, lépésünk következményeit biztosan ki tudjuk számítani. Bárcsak így lenne! Sajnos azonban általában nem ez a helyzet. Vajon ez azt jelenti, hogy minden eddig megismert, az egyéni döntésre vonatkozó elméletünket, a döntési eljárásokról eddig tanultakat sutba dobhatjuk? Szerencsére nem, ha ügyesek vagyunk, sok mindent felhasználhatunk a már ismert modellekből. Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, miként hasznosíthatjuk a korábban elsajátítottakat, és egyben bevezetést nyerünk a bizonytalanság melletti döntések elméleti alapjaiba. Ahogy eddig is, most sem törekszünk arra, hogy a lehető legáltalánosabb formában ismerjük meg az állításokat, sokat feláldozunk az általánosságból a könnyebb érthetőség és kezelhetőség oltárán. Mégis, mindannak, amit ebben a fejezetben megtalálunk, nagy hasznát vehetjük későbbi tanulmányainkban, és – ez sem elhanyagolható szempont – a gyakorlati alkalmazásokban, például az információ gazdaságtanában és a befektetések elméletében. Ha nem hangzana kicsit fellengzősen, azt is mondhatnánk, e területek legfontosabb alapjaival ismerkedhetünk meg, ha végigolvassuk ezt a fejezetet.[30]

12.A. A bizonytalanság melletti döntés alapmodellje

Roppant szerencsés vagyok, felajánlották, hogy ingyen részt vehetek egy meglehetősen kedvezőnek tűnő szerencsejátékban. Egy kockadobás alapján állapítják meg a nyereményemet: ha kisebbet dobok, mint a hatos, akkor nem nyerek semmit, ha sikerül hatost dobnom, kapok egymillió forintot. Ráadásul választhatok,

[30]Az itt említettek első, klasszikus megfogalmazása Neumann János és Oscar Morgenstern nevéhez fűződik, a fejezetben leírt várható hasznosság elméletet ezért szokás Neumann-Morgenstern féle várhatóhasznosság-elméletnek is nevezni

egy száz darab közül véletlenül kiválasztott kockával dobok, vagy azzal, ami a zsebemben lapul.

Két döntést kell meghoznom, belemenjek-e a játékba, illetve válasszam-e a saját kockámat. Mit tegyek? Noha bizonytalan vagyok abban, hogy nyerek-e, az első döntés nem nehéz: mivel veszíteni semmiképpen sem veszíthetek, nyerni azonban igencsak nyerhetek, nincs értelme elutasítani a lehetőséget. A második döntés már kicsit fogósabb. A válasz nyilván attól függ, mit feltételezek a számomra ismeretlen kockákról, illetve mit tudok a sajátomról. Miután az ismeretlen kockákról egyáltalán nem rendelkezem informácóval, jogosan(?) feltételezhetem, hogy a közülük véletlenül kiválasztott az *ideális kocka*, azaz minden szám egyformán egyhatod valószínűséggel kerül felülre egy dobás során. Most már csak a saját kockám tulajdonságaitól függ, melyiket válasszam. Számtalanszor dobtam már vele, de hatost a legritkább esetben sikerült elérnem, maximum minden tíz dobásból egyszer. Miután szeretnék nyerni és nagyobb esélyem van erre, ha véletlenszerűen választok a száz kockából, ezért inkább nem a sajátom mellett döntök. Persze, egészen más lenne a helyzet, ha a saját kockám esetén minden tíz dobásból legalább kétszer hatos jönne ki, ekkor ragaszkodnék ahhoz, hogy ezzel játsszunk.

Ez a valószínűtlen példa jól illusztrálja, hogy a bizonytalanság melletti döntésem már nem csak attól függ, mit is nyerhetek, hanem attól is, hogy milyen valószínűséggel. Ez eddig teljesen természetesnek tűnik, csak az nem világos még teljesen, miként illeszthetjük mindezt be az eddigi döntési modellünkbe. Vizsgáljuk most meg a második döntést!

A végső alternatívák(kimenetek) X halmaza most két elemű: $X = \{0, 1000000\}$, hiszen vagy nyerek, vagy nem. A preferenciám (vagy a döntési szerkezetem) ezen a halmazon elég egyértelmű, jobban örülök a pozitív nyereménynek. Hol van itt a szerepe a nyeremény valószínűségének? Sehol. Nincs mese, át kell fogalmazni az eddigi döntési modellünket. Az új modell teljesen absztrakt lesz, konkrét példákat mindenki könnyen kereshet, találhat.

12.A.1. Kockázatos alternatívák, lutrik: a döntéshozó alternatívahalmaza

Legyen a kimentek halmaza C. Kizárólag az egyszerűség érdekében C legyen véges, a kimeneteket a n szimbólummal indexeljük: $n = 1, 2, \ldots, N$.

12.A.1. Definíció. *Egy a C halmazon értelmezett*

$$L = (p_1, p_2, \ldots, p_N)\,,\; p_n \geqq 0,\; \sum_{n=1}^{N} p_n = 1$$

(kívülről adott, objektív) valószínűségeloszlást egyszerű lutrinak *nevezünk.*

12.A.2. Definíció. *Legyen adott K darab $(k = 1, 2, \ldots, K)$ egyszerű lutri. Jelöljük ezeket az L_k szimbólummal, ahol $L_k = \left(p_1^k, \ldots, p_N^k\right)$. Legyenek adottak továbbá* *az* $\alpha_k \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$ *skalárok. Az*

$$L^ö = (L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$$

összetett lutri *az a kockázatos alternatíva, ami a k-adik L_k egyszerű lutrit α_k valószínűséggel eredményezi.*

12.A.3. Definíció. *Bármely $L^ö$ összetett lutriból egyértelműen származtatható egy* redukált $L = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ *egyszerű lutri, ahol*

$$p_n = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k.$$

A származtatás visszafelé nem egyértelmű, amint azt könnyen beláthatjuk. Elég, ha belegondolunk abba, hogy egy szimplex egy pontja a csúcspontjai konvex kombinációjaként egyértelműen előállítható, de ugyanígy előállítható, mint egy őt tartalmazó szakasz végpontjainak konvex kombinációja.

□ □ □

12.A.4. Feladat. *Mutassa meg, hogy egy tetszőleges L egyszerű lutri több összetett lutriból is származtatható!*

□ □ □

Jelöljük a C halmazon értelmezett összes lutri halmazát az $\mathcal{L}^ö$,valamint az összes egyszerű lutri halmazát az $\mathcal{L}$ szimbólummal! A továbbiakban (de csak rövid ideig) a döntéshozó alternatívahalmaza az $\mathcal{L}^ö$ halmaz lesz.

12.A.2. A döntéshozó preferenciái

Ahogy eddig is, a döntéshozó preferenciáit az $\mathcal{L}^ö$ alternatívahalmazán értelmezett bináris relációként értelmezzük. Vegyük észre, hogy ezek a preferenciák most már nemcsak a kimenetekre, hanem azok valószínűségeire is vonatkoznak. Ezekre a preferenciákra, ahogy korábban is, több feltételezéssel élünk.

12.A.5. Feltevés. *A döntéshozó preferenciarendezése racionális, azaz* teljes *és* tranzitív.

12.A.6. Feltevés (Konzekvencializmus). *A döntéshozót csak a (végső) kimenetekhez tartozó* egyszerű (redukált) *lutri „érdekli": legyen $L^ö$ tetszőleges összetett lutri, amelyhez az L redukált lutri tartozik, ekkor*

$$L^ö \sim L.$$

E két feltevésből következik, hogy ha találunk egy olyan $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvényt, ami reprezentálja a döntéshozó preferenciáit az egyszerű lutrik $\mathcal{L}$ halmazán, akkor ezt egyszerűen kiterjeszthetjük az összes lutri $\mathcal{L}^{ö}$ halmazára is: létezik olyan $U^{ö} : \mathcal{L}^{ö} \to \mathbb{R}$, hogy ha $L^{ö,1}$és $L^{ö,2}$ összetett lutri, amelyekhez rendre az L^1, illetve az L^2 redukált lutrik tartoznak, akkor

$$U^{ö}\left(L^{ö,1}\right) = U\left(L^1\right) \gtrsim U^{ö}\left(L^{ö,2}\right) = U\left(L^2\right) \Leftrightarrow L^{ö,1} \gtrsim L^{ö,2}.$$

Emiatt a további vizsgálatainkat leszűkítjük az egyszerű lutrik $\mathcal{L}$ halmazára, a döntéshozó preferenciarendezése természetesen ezen is teljes és tranzitív. A továbbiakban, ha nem említjük is, mindig racionális preferenciákat feltételezünk.

Tekintsük most a $(L_1, L_2; \alpha_1, \alpha_2)$ összetett lutrit! Ebből az eddigiek értelmében egyértelműen származtathatunk egy egyszerű lutrit, amit a

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$$

módon is jelölhetünk, azaz e redukált lutri úgy is értelmezhető mint az L_1 és az L_2 egyszerű lutrik konvex kombinációja, ami maga is egy egyszerű lutri, így a döntéshozó preferenciarendezése erre is vonatkozik. E feltételezett rendezés két további tulajdonságát használjuk a későbbiekben. Az első ezek közül ismerős lehet.

12.A.7. Feltevés (Folytonosság). *A döntéshozó $\gtrsim$ preferenciarendezése folytonos az $\mathcal{L}$ halmazon, azaz tetszőleges $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ lutrikra a*

$$\{\alpha \in [0,1] \,|\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2 \gtrsim L_3 \} \subset [0,1],$$

illetve a

$$\{\alpha \in [0,1] \,| L_3 \gtrsim \alpha L_1 + (1-\alpha) L_2 \} \subset [0,1]$$

halmazok zártak.

Ahogy korábban, a bizonytalanságmentes esetben is, a preferenciarendezés racionalitása és folytonossága már elegendő a reláció folytonos függvénnyel való reprezentálhatóságához. Ezt ugyan most nem bizonyítjuk, de hasznos gyakorlásként érdemes a következő feladat megoldani.

□ □ □

12.A.8. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a folytonosság fenti definíciójából következik, hogy tetszőleges $L \in \mathcal{L}$ lutrira az*

$$\{L' \in \mathcal{L} \,| L' \gtrsim L \}, \quad \text{és az} \quad \{L' \in \mathcal{L} \,| L \gtrsim L' \}$$

halmazok zártak az $\mathcal{L}$ halmazban!

□ □ □

Az utolsó tulajdonsággal eddig még nem találkoztunk, alkalmazhatósága, érvényességi köre erősen vitatott, mégis a bizonytalanság melletti döntések elméletének alapvető fogalma.

12.A.9. Feltevés (Függetlenségi axióma). *A döntéshozó $\succsim$ preferenciarendezése az $\mathcal{L}$ halmazon kielégíti a függetlenségi axiómát, azaz tetszőleges $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ lutrikra és $\alpha \in (0,1)$ skalárra*

$$L_1 \succsim L_2 \Longleftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succsim \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3.$$

A következő feladat hasznos ujjgyakorlat.

□ □ □

12.A.10. Feladat. *Mutassa meg, ha a döntéshozó $\succsim$ preferenciarendezése az $\mathcal{L}$ halmazon kielégíti a függetlenségi axiómát, akkor tetszőleges $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ lutrikra és $\alpha \in (0,1)$ skalárra*

$$\begin{aligned} L_1 &\succ L_2 \Longleftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3, \\ L_1 &\sim L_2 \Longleftrightarrow \alpha L_1 + (1-\alpha) L_3 \sim \alpha L_2 + (1-\alpha) L_3. \end{aligned}$$

□ □ □

A függetlenségi axiómából a preferenciarendezés több érdekes tulajdonsága következik, ezekből néhányat a következő segédtételekben be is látunk.

12.A.11. Segédtétel. *Legyen $L_0, L_1, \ldots, L_K$ $(K+1)$ darab lutri, valamint legyen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \geqq 0$, és $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$! A döntéshozó preferenciarendezése elégítse ki a függetlenségi axiómát! Ha $\forall k$-ra $L_k \succsim L_0$, akkor*

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k \succsim L_0.$$

Ha $\forall k$-ra $L_0 \succsim L_k$, akkor

$$L_0 \succsim \sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k.$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $K = 1$ esetén triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy $K > 1$,és hogy a segédtétel állítása $K-1$ esetén is teljesül. Tekintsük most az első irányt, azaz legyen $\forall k$-ra $L_k \succsim L_0$! Ekkor, mivel

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k = (1-\alpha_K) \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\alpha_k}{(1-\alpha_K)} L_k + \alpha_K L_K,$$

valamint az indukciós feltevés értelmében $\sum_{k=1}^{K-1} \frac{\alpha_k}{(1-\alpha_K)} L_k \succsim L_0$, a függetlenségi axióma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(1-\alpha_K) \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\alpha_k}{(1-\alpha_K)} L_k + \alpha_K L_K \succsim (1-\alpha_K) L_0 + \alpha_K L_K.$$

Mégegyszer alkalmazva a függetlenségi axiómát

$$(1-\alpha_K)\,L_0+\alpha_K L_K \gtrsim (1-\alpha_K)\,L_0+\alpha_K L_0 \gtrsim L_0,$$

ebből már a $\gtrsim$ reláció tranzitivitásából

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k \gtrsim L_0.$$

A másik irányt hasonlóképpen láthatjuk be. □

Ebből az eredményből – figyelembe véve a C halmaz végességét – már egyszerűen adódik a

12.A.12. Következmény. *Ha a döntéshozó racionális preferenciái kielégítik a függetlenségi axiómát, akkor a lutrik $\mathcal{L}$ halmazában létezik legjobb $\left(\overline{L}\right)$ és legrosszabb $(\underline{L})$ lutri, azaz olyanok, amelyekre $\overline{L} \gtrsim L \gtrsim \underline{L}$, $\forall L \in \mathcal{L}$.*[31]

□ □ □

12.A.13. Feladat. *Bizonyítsuk be a 12.A.12. Következményt!*

□ □ □

12.A.14. Segédtétel. *Legyen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ és $\alpha \in (0,1)$, valamint $L_1 \succ L_2$! Ekkor, ha a döntéshozó racionális preferenciarendezése kielégíti a függetlenségi axiómát, akkor*

$$L_1 \succ \alpha L_1 + (1-\alpha)\,L_2 \succ L_2.$$

BIZONYÍTÁS: Az állítás majdnem trivialitás, hiszen a függetlenségi axióma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$L_1 = \alpha L_1 + (1-\alpha)\,L_1 \succ \alpha L_1 + (1-\alpha)\,L_2 \succ \alpha L_2 + (1-\alpha)\,L_2 = L_2.$$

□

12.B. A várható hasznossági függvény létezése és tulajdonságai

Ebben a pontban továbblépünk a döntéshozó preferenciáinak jellemzésében. Megmutatjuk, hogy a folytonosságból és a függetlenségi axiómából nem egyszerűen

[31] A következmény állítása nem teljesen magától értetődő, hiszen a lutrik halmaza kontinuum számosságú!

a folytonos reprezentálhatóság következik, hanem olyan hasznossági függvénnyel is reprezentálni tudjuk a preferenciákat, amelynek a folytonosságon túl számos jó tulajdonsága van. Ezek közül említésre méltó a várható hasznosság tulajdonság, ami miatt ez az úgynevezett várható hasznosság függvény a bizonytalanság melletti döntések elméletének legfontosabb eszköze lett. Mielőtt azonban definiálnánk ezt a tulajdonságot, először még csak a folytonos reprezentálhatóságot látjuk be.

12.B.1. Lineáris hasznossági függvény létezése

Egy újabb, a függetlenségi axiómán alapuló segédtétellel kezdünk.

12.B.1. Segédtétel. *Legyen a lutrik $\mathcal{L}$ halmazában $\overline{L}$ legjobb és $\underline{L}$ legrosszabb lutri, valamint legyen $\overline{L} \succ \underline{L}$! Legyen továbbá $\alpha, \beta \in [0,1]$, valamint a döntéshozó racionális preferenciái elégítsék ki a függetlenségi axiómát! Ekkor*

$$\beta\overline{L} + (1-\beta)\,\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\beta > \alpha.$$

Bizonyítás: Tegyük föl először, hogy $\beta > \alpha$! Legyen

$$\gamma = \frac{\beta-\alpha}{1-a} \in (0,1]!$$

Ekkor

$$\beta\overline{L} + (1-\beta)\,\underline{L} = \gamma\overline{L} + (1-\gamma)\left(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L}\right).$$

A 12.A.14. Segédtétellel ugyanakkor

$$\overline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L},$$

azaz ismételten alkalmazva a 12.A.14. Segédtételt,

$$\beta\overline{L} + (1-\beta)\,\underline{L} = \gamma\overline{L} + (1-\gamma)\left(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L}\right) \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L}.$$

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy $\beta \leqq \alpha$! A $\beta = \alpha$ esetben azonnal ellentmondásra jutunk, így elegendő a $\beta < \alpha$ esetet vizsgálni. Ekkor azonban az elégségesség vizsgálatánál alkalmazott gondolatmenetet követve, és felcserélve α, illetve β szerepét kapjuk az ellentmondást. □

A 12.B.1. Segédtétel kimondásakor csak a függetlenségi axióma teljesülését tettük fel. Nem szóltunk a folytonosság szerepéről, ami most lép be a képbe:[32]

[32] A most következő segédtétel állítását szokás archimédeszi axiómának nevezni, sokan ezzel definiálják a preferenciarendezés folytonosságát.

12.B.2. Segédtétel. *Legyen a lutrik $\mathcal{L}$ halmazában $\overline{L}$ legjobb és $\underline{L}$ legrosszabb lutri, valamint legyen $\overline{L} \succ \underline{L}$! A döntéshozó racionális preferencirendezése legyen folytonos és elégítse ki a függetlenségi axiómát! Ekkor tetszőleges $L \in \mathcal{L}$ lutrihoz létezik olyan egyértelmű $\alpha_L \in [0,1]$ skalár, hogy*

$$\left(\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\,\underline{L}\right) \sim L.$$

BIZONYÍTÁS: A preferenciarendezés folytonossága miatt az

$$\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L} \succsim L\right\},$$
$$\left\{\alpha \in [0,1] \,\middle|\, L \succsim \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\,\underline{L}\right\}$$

halmazok zártak. A teljesség miatt egyik sem üres, és minden α legalább az egyikhez tartozik. Miután a $[0,1]$ intervallum összefüggő, azaz nem bontható fel két zárt, diszjunkt részhalmazra, ezért létezik olyan α_L, amely mind a kettőnek eleme. Az előző, 12.B.1. Segédtétel értelmében azonban ez az α_L szükségképpen egyértelmű. □

Innen már csak egy lépés a preferenciarendezést reprezentáló hasznossági függvény létezésének bizonyítása:

12.B.3. Tétel. *Az egyszerű lutrik $\mathcal{L}$ halmazán értelmezett, a függetlenségi axiómát kielégítő, folytonos, racionális preferenciarendezés reprezentálható folytonos hasznossági függvénnyel.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az állításban szereplő $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény a következő:

$$\forall L \in \mathcal{L}\text{-re } U(L) \triangleq \alpha_L,$$

ahol α_L a az előző, 12.B.2. Segédtételben szereplő skalár. Ez a függvény a preferenciarendezés folytonosságából következően nyilván folytonos, ezért csak annyit kell belátnunk, hogy reprezentálja a rendezést, azaz azt, hogy

$$L_1 \succsim L_2 \Longleftrightarrow \alpha_{L_1} \geqq \alpha_{L_2}.$$

A 12.B.2. Segédtétellel

$$L_1 \succsim L_2 \Longleftrightarrow \left(\alpha_{L_1}\overline{L} + (1-\alpha_{L_1})\,\underline{L}\right) \succsim \left(\alpha_{L_2}\overline{L} + (1-\alpha_{L_2})\,\underline{L}\right),$$

ugyanakkor a 12.B.1. Segédtétellel

$$\left(\alpha_{L_1}\overline{L} + (1-\alpha_{L_1})\,\underline{L}\right) \succsim \left(\alpha_{L_2}\overline{L} + (1-\alpha_{L_2})\,\underline{L}\right) \Longleftrightarrow \alpha_{L_1} \geqq \alpha_{L_2}.$$

□

Nyilván ennek az $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénynek tetszőleges pozitív monoton transzformációja is reprezentálja a döntéshozó preferenciáit. Az is igaz ugyanakkor, hogy az U fügvvénynek van egy olyan tulajdonsága, ami miatt kitüntetett szerepe lesz a későbbiekben.[33] Ez a tulajdonsága a linearitása, azaz tetszőleges $L_1, \ldots, L_K \in \mathcal{L}$ lutrikra és $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \geqq 0, \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$ valószínűségekre

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} a_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} a_k U\left(L_k\right).$$

12.B.4. Tétel. *A 12.B.3. Tétel bizonyításában szereplő, az egyszerű lutrik $\mathcal{L}$ halmazán értelmezett, a függetlenségi axiómát kielégítő, folytonos, racionális preferenciarendezést reprezentáló*

$$U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}, \quad \forall L \in \mathcal{L}\text{-re } U\left(L\right) \triangleq \alpha_L$$

hasznossági függvény lineáris.

Bizonyítás: Teljes indukcióval könnyű belátni, hogy elegendő arra az esetre bizonyítani a linearitást, amikor $K = 2$.[34] Ezek szerint a tétel bizonyításához azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges két L_1 és L_2 lutrira, valamint tetszőleges $\beta \in [0, 1]$ skalárra

$$U\left(\beta L_1 + (1-\beta) L_2\right) = \beta U\left(L_1\right) + (1-\beta) U\left(L_2\right).$$

A hasznossági függvény definíciójából következően

$$\begin{aligned} L_1 &\sim U\left(L_1\right) \overline{L} + \left(1 - U\left(L_1\right)\right) \underline{L}, \\ L_2 &\sim U\left(L_2\right) \overline{L} + \left(1 - U\left(L_2\right)\right) \underline{L}, \end{aligned}$$

Kétszer alkalmazva függetlenségi axiómát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\beta L_1 + (1-\beta) L_2 \sim \\ &\beta \left[U\left(L_1\right) \overline{L} + \left(1 - U\left(L_1\right)\right) \underline{L}\right] + (1-\beta) \left[U\left(L_2\right) \overline{L} + \left(1 - U\left(L_2\right)\right) \underline{L}\right]. \end{aligned}$$

Ha elvégezzük a beszorzásokat és átrendezünk, akkor látható, hogy ez az utolsó (összetett) lutri ugyanazt a redukált lutrit eredményezi, mint a

$$\left[\beta U\left(L_1\right) + (1-\beta) U\left(L_2\right)\right] \overline{L} + \left[1 - \left(\beta U\left(L_1\right) + (1-\beta) U\left(L_2\right)\right)\right] \underline{L}$$

(összetett) lutri. Emiatt

$$\begin{aligned} &\beta L_1 + (1-\beta) L_2 \sim \\ &\left[\beta U\left(L_1\right) + (1-\beta) U\left(L_2\right)\right] \overline{L} + \left[1 - \left(\beta U\left(L_1\right) + (1-\beta) U\left(L_2\right)\right)\right] \underline{L}. \end{aligned}$$

Mivel U reprezentáló hasznossági függvény, ezért a konstrukciójából kapjuk, hogy

$$U\left(\beta L_1 + (1-\beta) L_2\right) = \beta U\left(L_1\right) + (1-\beta) U\left(L_2\right),$$

azaz Ulineáris. □

[33] Ezt a tulajdonságot nem őrzi meg tetszőleges pozitív monoton transzformációja.
[34] Lássuk is be ezt az állítást!

12.B.2. A várható hasznosság tulajdonság

Eddigi eredményeinket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a véges kimeneteken értelmezett egyszerű lutrik halmazán, ha a döntéshozó racionális preferenciái folytonosak és kielégítik a függetlenségi axiómát, akkor létezik a preferenciákat reprezentáló lineáris hasznossági függvény. Vizsgáljuk is ezt meg egy kicsit alaposabban!

Jelöljük az n-edik kimenetet egy valószínűséggel eredményező (degenerált) lutrit az L^n szimbólummal! Tekintsünk most egy tetszőleges $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$ egyszerű lutrit. Nyilván ugyan ez az egyszerű lutri származtatható abból az összetett lutriból, amiben az L^n egyszerű lutri valószínűsége p_n, azaz $L \sim \sum_{n=1}^{N} p_n L^n$. Ha az U a preferenciákat reprezentáló lineáris hasznossági függvény, akkor ebből az következik, hogy

$$U(L) = U\left(\sum_{n=1}^{N} p_n L^n\right) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(L^n).$$

Szavakban: egy lutri haszna a degenerált lutrik hasznának a valószínűségekkel súlyozott átlaga. Az n-edik degenerált lutriban azonban a döntéshozó biztosan az n-edik kimenetet kapja. Ennek a kimenetnek a hasznát jelöljük az u_n, $n = 1, \ldots, N$ szimbólummal. Ha feltesszük tehát, hogy $U(L^n) = u_n$, akkor egy lutri hasznát a kimenetek hasznának a valószínűségekkel súlyozott átlagaként értelmezhetjük. Úgy is mondhatjuk, hogya lutri hasznossága *várható hasznosság*, a *kimenetek hasznának várható értéke.*

12.B.5. Definíció. *Az $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény rendelkezik a* várható hasznosság tulajdonsággal, *ha az N kimenethez hozzárendelhetünk olyan $u_1, \ldots, u_N$ skalárokat, hogy minden $L = (p_1, \ldots, p_n)$egyszerű lutrira*

$$U(L) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n.$$

Az ilyen hasznossági függvényeket várható hasznossági függvénynek *vagy* Neumann-Morgenstern-*féle hasznossági függvénynek hívjuk.*

□ □ □

12.B.6. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény akkor és csak akkor rendelkezik a várható hasznosság tulajdonsággal, ha lineáris.*

□ □ □

Az eddigiek alapján tehát most már azt is mondhatjuk, hogy hogy a véges kimeneteken értelmezett egyszerű lutrik halmazán, ha a döntéshozó racionális preferenciái folytonosak és kielégítik a függetlenségi axiómát, akkor a döntéshozónak létezik várható hasznossági függvénye. Ebben az eredményben döntő szerepet játszik a függetlenségi axióma feltételezése. Ha a döntéshozó preferenciái nem elégítik ki ezt az axiómat, akkor hasznossági függvénye nem rendelkezhet a várható hasznosság tulajdonsággal.

□ □ □

12.B.7. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha egy döntéshozó preferenciái reprezentálhatók várható hasznossági függvénnyel, akkor szükségképpen kielégítik a függetlenségi axiómát.*

□ □ □

Jó lenne azonban, ha nem értenénk félre a függetlenségi axióma szerepét. Semmi olyasmit nem állítottunk ugyanis, hogy ha egyszer a döntéshozó preferenciái kielégítik, akkor bármely hasznossági függvénye várható hasznossági függvény. A várható hasznosság tulajdonság – akárcsak a korábban vizsgált linearitás – nyilván kardinális tulajdonság, nem örződik meg minden pozitív monoton transzformációra, csak azokra, amelyekre az is megőrződik. Az ilyen transzformációkat *affin* transzformációknak hívjuk.

12.B.8. Tétel. *Legyen $U:\mathcal{L}\to\mathbb{R}$ a $\succsim$ preferenciarendezést reprezentáló* Neumann-Morgenstern *hasznossági függvény. Egy másik $\tilde{U}:\mathcal{L}\to\mathbb{R}$ hasznossági függvény akkor és csak akkor lehet ugyannennek a preferenciarendezésnek* Neumann-Morgenstern *hasznossági függvénye, ha létezik olyan $\beta>0$ és γ skalár, hogy*

$$\tilde{U}(L)=\beta U(L)+\gamma \quad \forall L\in\mathcal{L}\text{ -re.}$$

Bizonyítás: Elégségesség: Miután az $\tilde{U}$ függvény az U pozitív monoton transzformációja, ezért biztosan ugyanazokat a preferenciákat reprezentálja. Annyit kell tehát csak belátnunk, hogy rendelkezik a várható hasznosság tulajdonsággal, illetve a 12.B.6. Feladatból következően, hogy lineáris. Tekintsük a következő egyenlőségláncolatot:

$$\begin{aligned}
& \tilde{U}\left(\sum_{k=1}^{K}a_kL_k\right)=\beta U\left(\sum_{k=1}^{K}a_kL_k\right)+\gamma= \\
= \quad & \beta\left[\sum_{k=1}^{K}a_kU(L_k)\right]+\gamma=\sum_{k=1}^{K}a_k\left[\beta U(L_k)+\gamma\right]= \\
= \quad & \sum_{k=1}^{K}a_k\tilde{U}(L_k),
\end{aligned}$$

azaz $\tilde{U}$ lineáris.

Szükségesség: Miután az U függvény rendelkezik a várható hasznosság tulajdonsággal, és így lineáris, ezért nyilván folytonos az egyszerű lutrik kompakt halmazán.[35] Emiatt a Weierstrass-tétel alapján felveszi a minimumát és a maxi-

[35] $\mathcal{L}$ szimplex, ezért nyilván kompakt.

mumát, azaz létezik legjobb $\left(\overline{L}\right)$ és legrosszabb $\left(\underline{L}\right)$ lutri, amelyekre $\overline{L} \gtrsim L \gtrsim \underline{L}$, $\forall L \in \mathcal{L}$. Tekintsünk most egy tetszőleges L lutrit és legyen $\alpha_L \in [0,1]$ a következőképpen definiált:

$$U(L) = \alpha_L U\left(\overline{L}\right) + (1-\alpha_L)\, U\left(\underline{L}\right),$$

azaz

$$\alpha_L = \frac{U(L) - U\left(\underline{L}\right)}{U\left(\overline{L}\right) - U\left(\underline{L}\right)} \tag{*}$$

Miután U várható hasznossági függvény, és így lineáris, valamint reprezentálja a preferenciákat, ezért

$$\alpha_L U\left(\overline{L}\right) + (1-\alpha_L)\, U\left(\underline{L}\right) = U\left(\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\, \underline{L}\right)$$

és

$$L \sim \alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\, \underline{L}.$$

Ugyanakkor $\tilde{U}$ is *Neumann-Morgenstern* hasznossági függvény, és ugyanazokat a preferenciákat ábrázolja, ezért

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(L) &= \tilde{U}\left(\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\, \underline{L}\right) = \\
&= \alpha_L \tilde{U}\left(\overline{L}\right) + (1-\alpha_L)\, \tilde{U}\left(\underline{L}\right) = \alpha_L \left(\tilde{U}\left(\overline{L}\right) - \tilde{U}\left(\underline{L}\right)\right) + \tilde{U}\left(\underline{L}\right).
\end{aligned}$$

Ha most $\alpha_L$helyébe beírjuk a (*) összefüggésben szereplő kifejezést, akkor láthatjuk hogy a

$$\beta = \frac{\tilde{U}\left(\overline{L}\right) - \tilde{U}\left(\underline{L}\right)}{U\left(\overline{L}\right) - U\left(\underline{L}\right)}$$

és a

$$\gamma = \tilde{U}\left(\underline{L}\right) - U\left(\underline{L}\right)\beta$$

skalárokkal

$$\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma.$$

□

13. fejezet

A kockázattal szembeni attitűd

Térjünk vissza egy pillanatra az eredeti példánkhoz, és tegyük fel, már döntöttem, a saját kockámmal játszom, hiszen minden tíz dobásból (átlagosan) kétszer hatost dobok, azaz bátran állíthatjuk, az egymillió forintos díjat, egyötöd valószínűséggel megkapom. A várható nyereményem tehát kétszázezer forint. Vajon, ha biztosan kapnék ennyi pénzt, akkor lemondanék-e a szerencsjátékban való részvételről? Másképpen fogalmazva: mi a jobb számomra, a biztos kétszázezer forint vagy az a lutri, amiben négyötöd valószínűséggel nem nyerek semmit, de egyötöd valószínűséggel egymillió a nyereményem? Vegyük észre, itt már semmi nem függ a nyerési esélyemtől, az adott. Ami számít, az az, miként vélekedem a kockázatról, elutasítom-e, vagy inkább kedvelem. Ha a biztos összeget, a lutri várható értékét, választom, mert azt számomra kedvezőnek tartom, akkor kockázatellenes (kockázatkerülő) vagyok, ha a játékot, azaz magát a lutrit, akkor kockázatkedvelő (kockázatkereső). Ha számomra mindegy, hogy a várható értéket kapom biztosan, vagy részt vehetek a játékban, akkor kockázatsemleges vagyok.

Ezeket a fogalmakat tesszük precízebbé, és általánosítjuk a továbbiakban.

13.A. Pénzbeli lutrik és a döntéshozó preferenciái

Eddig a kimenetek halmazát nem specifikáltuk pontosan, csak annyit feltételeztünk róla, hogy véges. Ebben a modellben feltesszük, hogy a kimenetek nemnegatív pénzösszegeket jelentenek, és az általánosság kedvéért azt is, hogy a kimenetek halmaza megegyezik a nemnegatív félegyenessel, azaz $C = \mathbb{R}_+$. A $\xi \in \mathbb{R}_+$ folytonos (valószínűségi) változó jelöli a pénzösszeget.

Ez a modellváltozat a kimeneti halmaz végtelensége miatt nem illeszkedik pontosan az eddigi keretbe, de nagy bajt nem okozunk ezzel az általánosítással, az előző eredmények mind igazak ebben a végtelen számosságú esetben is.[36]

Egy pénzbeli lutri ezek után nem más, mint egy eloszlásfüggvény:

$$F : \mathbb{R}_+ \to [0,1], \quad F(x) = \Pr\{\xi \leqq x\}.$$

Legyen ezek után a lutrik $\mathcal{L}$ halmaza a nemnegatív félegyenes fölött értelmezett eloszlásfüggvények családja.[37]. Az eloszlásfüggvények, ezen a halmazon megőrzik a lutrikra korábban feltételezett lineáris szerkezetet, egyszerűen definiálható az

$$(F_1, \ldots, F_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$$

összetett lutri: nem más, mint az F_k egyszerű lutrik konvex lineáris kombinációja:

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k F_k.$$

13.A.1. Definíció. *Az $F_{\{x\}} \in \mathcal{L}$ egyszerű lutrit* degenerált lutrinak *mondjuk, ha biztosan az x pénzösszget eredményezi.*
Az $F \in \mathcal{L}$ lutri várható értékén az

$$\int x \mathrm{d}F(x)$$

pénzösszget értjük.

A döntéshozó alternatíva halmaza – akárcsak az előző fejezetben – a (pénzbeli) egyszerű lutrik halmaza, e felett rendelkezik, feltevés szerint, racionális és folytonos preferenciákkal. Az eddigiek értelmében ez azt jelenti, hogy a preferenciarendezését folytonos $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel reprezentálhatjuk. Ha preferenciái ezeken felül kielégítik a függetlenségi axiómát is, akkor – szintén az előző fejezetben mondottakból következően – létezik a várható hasznosság tulajdonsággal bíró hasznossági függvénye is.

13.A.2. Definíció. *Az $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény rendelkezik a* várható hasznosság tulajdonsággal, *ha létezik olyan $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ hozzárendelés, hogy*

$$U(F) = \int u(x) \, \mathrm{d}F(x).$$

Ekkor az U hasznossági függvényt várható hasznossági függvénynek *vagy* Neumann-Morgenstern-féle hasznossági függvénynek*, az u hozzárendelést* Bernoulli-függvénynek *nevezzük.*

A továbbiakban az $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *Bernoulli*-függvényről feltesszük, hogy folytonos és – jól ismerve az emberi természetet – azt is, hogy növekvő.

[36] Ezt most el kell hinnünk, bizonyítani nincs sem időnk, sem helyünk. Megtehetnénk azt is, hogy a továbbiakban olyan eseteket vizsgálnánk, ahol a valószínűségi változónk csak véges sok értéket vehet fel a félegyenesen, de ezzel jelentősen csökkentetnénk a modellünk erejét.

[37] Könnyen látható, milyen szépen illeszkedik ebbe az általános keretbe az az eset, amikor a valószínűségi változó csak véges sok értéket vehet fel.

13.B. Kockázatellenesség

A döntéshozó kockázattal szembeni attitűdjét definiáljuk a következőkben. Jól figyeljük meg, hogy az általános definíciókhoz semmi mást nem kell feltételeznünk, mint azt, hogy az egyszerű lutrik várható értéke létezzen.

13.B.1. Definíció (kockázatellenesség). *A döntéshozó akkor és csak akkor (szigorúan) kockázatellenes, ha tetszőleges $F \in \mathcal{L}$ lutri esetén annak a degenerált lutrinak a haszna, ami biztosan a lutri várható értékét eredményezi, nem kisebb (nagyobb), mint a lutri haszna, azaz*

$$U\left(F_{\{\int x \mathrm{d}F(x)\}}\right) \geqq (>)\, U(F) \quad \forall F \in \mathcal{L}\text{-re} \tag{13.B–1}$$

A döntéshozó akkor és csak akkor (szigorúan) kockázatkedvelő, ha tetszőleges $F \in \mathcal{L}$ lutri esetén a (13.B–1) reláció fordított irányú.
A döntéshozó akkor és csak akkor kockázatsemleges, ha tetszőleges $F \in \mathcal{L}$ lutri esetén a (13.B–1) összefüggésben egyenlőség van.

13.B.2. Definíció (Biztos egyenértékes). *Egy tetszőleges $F \in \mathcal{L}$ egyszerű lutrihoz tartozó $CE(F)$* biztos egyenértékes *az a pénzösszeg, amelyet biztosan eredményező degenerált lutri haszna éppen egyenlő az eredeti lutri hasznával, azaz*

$$CE(F) \in \mathbb{R}_+, \quad U\left(F_{\{CE(F)\}}\right) = U(F)\,.$$

Ha az U hasznossági függvény rendelkezik a várható hasznosság tulajdonsággal, akkor a biztos egyenértékes olyan jelölést kap, ami utal erre:

$$CE(F) \triangleq c(F, u)\,,$$

ahol u a Bernoulli-*függvény, azaz ebben az esetben*

$$u(c(F, u)) = \int u(x)\,\mathrm{d}F(x)\,.$$

A következő tétel az e fogalmak közötti kapcsolatot jellemzi.

13.B.3. Tétel. *Ha a döntéshozó preferenciarendezését a várható hasznosság tulajdonsággal bíró U hasznossági függvénnyel reprezentálhatjuk, és u a döntéshozó* Bernoulli-*függvénye, akkor az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*

(i) *a döntéshozó kockázatellenes;*

(ii) *az u függvény konkáv;*

(iii) $c(F, u) \leqq \int x dF(x) \quad \forall F \in \mathcal{L}$ esetén.

Bizonyítás: $(i) \iff (ii)$

Ha az U hasznossági függvény rendelkezik a várható hasznosság tulajdonsággal, akkor a kockázatellenesség az $\forall F \in \mathcal{L}$-re

$$\int u(x)\, dF(x) \leqq u\left(\int x dF(x)\right) \tag{13.B–2}$$

alakot ölti, ami éppen a konkáv függvényekre vonatkozó *Jensen*-egyenlőtlenség.

$(i) \iff (iii)$

Miután az u *Bernoulli*-függvény szigorúan növekvő, ezért $\forall F \in \mathcal{L}$ esetén a biztos egyenértékes definíciójából

$$\begin{aligned} c(F,u) &\leqq \int x dF(x) \iff \\ u(c(F,u)) &\leqq u\left(\int x dF(x)\right) \iff \\ \int u(x)\, dF(x) &\leqq u\left(\int x dF(x)\right). \end{aligned}$$

□

13.B.1. Az abszolút kockázatellenességi együttható

Vajon van-e értelme annak a kérdésnek, hogy a döntéshozók közül az egyik kockázatellenesebb-e, mint a másik? Elvégre van, aki ténylegesen retteg a kockázattól, másokat pedig alig érdekli az, vállalnak-e valamennyi rizikót. Ha van értelme, akkor pedig találni kellene valamilyen mértéket, aminek az alapján ezt a kérdést meg tudjuk válaszolni.

Tegyük fel, hogy a döntéshozók preferenciáit reprezentálni tudjuk a várható hasznosság tulajdonságot kielégítő *Neumann–Morgenstern*-féle hasznossági függvénnyel! Ekkor, ha valakit egyáltalán nem érdekel a kockázat, azaz kockázatsemleges, akkor az u *Bernoulli*-függvénye a (13.B–2) *Jensen*-egyenlőtlemség alapján lineáris. Ha azt is felteszzük, hogy kétszer differenciálható, akkor ez azt jelenti, hogy egy kockázatsemleges döntéshozó *Bernoulli*-függvényének második deriváltja mindenütt zérus. Azt is tudjuk azonban, hogy egy (szigorúan) kockázatellenes döntéshozó *Bernoulli*-függvénye szigorúan konkáv, azaz a második deriváltja negatív. Logikusnak tűnik ezek alapján, ha a kockázatellenesség mértékét a *Bernoulli*-függvény második deriváltjához kötjük.

Felmerül azonban egy újabb probléma. Ha a döntéshozó preferenciáit reprezentáló *Neumann–Morgenstern*-féle hasznossági függvényben u a *Bernoulli*-függvény, akkor ugyanezeket a preferenciákat reprezentálja az az affin transzformáció, amiben a *Bernoulli*-függvény αu, ahol α pozitív skalár. Ebben az esetben azonban a második derivált az eredetihez képest megváltozik, szintén az eredeti α-szorosa lesz. Ha csak ez a második derivált jellemezné a kockázatellenesség mértékét, akkor ez legalább annyira a konkrét reprezentáció függvénye lenne, mint a preferenciáké. Ezért érdemes kiküszöbölni ezt a „torzítást”, és az u függvény első deriváltjával normálni. Így kapjuk az úgynevezett *Arrow-Pratt*-féle abszolút kockázatellenességi együtthatót:

13.B.4. Definíció (Abszolút kockázatellenességi együttható). *A döntéshozó u függvénye legyen kétszer differenciálható. Ekkor az $r_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$* Arrow-Pratt*-féle abszolút kockázatellenességi együtthatót az*

$$r_A(x) \triangleq -\frac{u''(x)}{u'(x)} \geqq 0$$

összefüggéssel definiáljuk. Minél nagyobb ez az együttható, a döntéshozó annál kockázatellenesebb. Ha egy döntéshozó r_A függvénye x-ben állandó, akkor Bernoulli-*függvénye állandó abszolút kockázatellenességet* (CARA) *mutat. Ha az r_A együttható x-ben csökken, akkor a döntéshozó* Bernoulli-*függvénye csökkenő abszolút kockázatellenességet* (DARA) *mutatnak.*

13.B.5. Példa. *Legyen $u = -e^{-ax}, a > 0$! Ekkor $r_A(x) = a$, azaz állandó. Ilyen esetben a döntéshozó preferenciái* CARA *típusúak.*

A döntéshozók kockázatellenessége közötti összehasonlításnak azonban vannak más, egészen természetesnek tűnő módjai is. Ezekről szól a következő tétel. Jelöljük az első döntéshozó abszolút kockázatellenességi együtthatóját az $r_A(x, u_1)$ szimbólummal, a másodikét hasonlóképpen.

13.B.6. Tétel. *Ha két döntéshozó preferenciarendezését a várható hasznosság tulajdonsággal bíró U_1, illetve U_2 hasznossági függvénnyel reprezentálhatjuk, és u_1, illetve u_2 rendre a döntéshozók* Bernoulli-*függvénye, akkor az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*

(i) $r_A(x, u_1) \leqq r_A(x, u_2)$;

(ii) az u_2 függvény az u_1 konkáv transzformációja (másképpen u_2 konkávabb), azaz létezik olyan v monoton növekvő, konkáv függvény, amire

$$u_2(x) = v(u_1(x)), \tag{13.B–3}$$

(iii) tetszőleges F esetén

$$c(F, u_1) \geqq c(F, u_2).$$

Bizonyítás: Arra az esetre bizonyítunk csak, ha mindkét *Bernoulli*-függvény differenciálható.

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$

A v monoton növekedő függvény biztosan létezik, hiszen u_1 és u_2 ugyanazokhoz a pénzben ordinális preferenciákhoz tartozó *Bernoulli*-függvény: mindkét döntéshozó jobban szereti a több pénzt a kevesebbnél. Csak annyit kell tehát belátnunk, hogy v konkáv. Differenciáljuk a (13.B–3) összefüggést! Ekkor

$$u_2'(x) = v'(u_1(x))\, u_1'(x), \tag{13.B–4}$$

majd ezt tovább differenciálva kapjuk, hogy

$$u_2''(x) = v'(u_1(x))\, u_1''(x) + v''(u_1(x))\,(u_1'(x))^2 .$$

Miután mind u_1, mind v szigorúan monoton növekvő függvény, ezért ennek mind a két oldalát eloszthatjuk a $v'(u_1(x))\, u_1'(x)$ kifejezéssel:

$$\frac{u_2''(x)}{v'(u_1(x))\, u_1'(x)} = \frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} + \frac{v''(u_1(x))}{v'(u_1(x))}(u_1'(x)),$$

amit -1-gyel szorozva és figyelembe véve az (13.B–4) összefüggést kapjuk, hogy

$$r_A(x, u_2) = r_A(x, u_1) - \frac{v''(u_1(x))}{v'(u_1(x))}(u_1'(x)).$$

Ebből megintcsak a monotonitásokkal

$$r_A(x, u_1) \leqq r_A(x, u_2) \Longleftrightarrow v''(u_1(x)) \leqq 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*

Figyeljük meg a következő egyenlő(tlen)ségláncolatot, ahol az utolsó egyenlőtlenség v konkavitásából jön:

$$\begin{aligned} v(u_1(c(F, u_2))) &= u_2(c(F, u_2)) = \int u_2(x)\, dF(x) = \\ &= \int v(u_1(x))\, dF(x) \leqq v\left(\int u_1(x)\, dF(x)\right). \end{aligned}$$

Ha tekintjük ennek első és utolsó tagját, és figyelembe vesszük, hogy v monoton, akkor

$$u_1(c(F, u_2)) \leqq \int u_1(x)\, dF(x) = u_1(c(F, u_1)).$$

Ebből, mivel u_1 növekvő:

$$c(F, u_1) \geqq c(F, u_2).$$

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*

Legyen $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in [0, 1]$, valamint F az az eloszlásfüggvény, ami λ valószínűséggel az x, illetve $(1-\lambda)$ valószínűséggel az y értéket ad. Ekkor a biztos egyenértékes definíciójából

$$u_1(c(F, u_1)) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda)\, u_1(y)$$

amiből a biztosan létező monoton növekvő v transzformációval

$$u_2\left(c\left(F,u_1\right)\right)=v\left(\lambda u_1\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)u_1\left(y\right)\right).$$

Ugyancsak a biztos egyenértékes definíciójából

$$u_2\left(c\left(F,u_2\right)\right)=\lambda u_2\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)u_2\left(y\right)=\lambda v\left(u_1\left(x\right)\right)+\left(1-\lambda\right)v\left(u_1\left(y\right)\right).$$

Miután az u_2 monoton növekvő ezért a feltételezett $c\left(F,u_1\right)\geqq c\left(F,u_2\right)$ relációból

$$v\left(\lambda u_1\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)u_1\left(y\right)\right)\geqq\lambda v\left(u_1\left(x\right)\right)+\left(1-\lambda\right)v\left(u_1\left(y\right)\right),$$

azaz v konkáv. □

13.B.2. Egy (elméleti) alkalmazás

Sokszor tapasztaljuk, hogy ugyanaz a döntéshozó, aki roppant óvatos, amíg „nincs semmije”, nagyobb kockázatot hajlandó vállalni, ha gazdagabbá válik. Mászóval, ahogy nő a vagyona, úgy válik kevésbé kockázatellenessé. Korábban azt mondtuk, hogy *Bernoulli*-függvénye *DARA* típusú.

Legyen most $x_1>x_2$ két pénzmennyiség (vagyon) és a döntéshozó *Bernoulli*-függvénye u. Jelöljük a vagyon megváltozását a z szimbólummal. Ekkor a két vagyonszint mellett értékelt vagyonváltozás felírható az $u_1(z)\triangleq u\left(x_1+z\right)$, illetve $u_2(z)\triangleq u\left(x_2+z\right)$ alakban. Ha a döntéshozó *Bernoulli*-függvénye *DARA* típusú, akkor nyilván

$$r_A\left(x,u_1\right)\leqq r_A\left(x,u_2\right).$$

Ha erre az átfogalmazott problémára alkalmazzuk a (13.B.6) Tételt, akkor a döntéshozóra igaz a következő állítás is.

13.B.7. Tétel. *Az alábbi tulajdonságok ekvivalensek.*

(i) A döntéshozó *Bernoulli*-függvénye *DARA* típusú;

(ii) Ha $x_1>x_2$, akkor létezik olyan monoton növekvő konkáv v függvény, hogy

$$u_2(z)=v\left(u_1\left(z\right)\right);$$

(iii) Tetszőleges $F\left(z\right)$ lutrira (kockázatra), annak a lutrinak a biztos egyenértékese, amit úgy kapunk, hogy x-hez a z kockázatot adjuk – jele c_x,ahol $u\left(c_x\right)=\int u\left(x+z\right)dF\left(z\right)$ – olyan, hogy $\left(x-c_x\right)$ az x csökkenő függvénye. Másképpen: minél magasabb x, annál kevesebbet adnánk azért, hogy „megszabaduljunk a kockázattól”.

III. rész

Függelékek

1F. függelék

A KTL-technika és alkalmazása egyszerű esetben

1F.1. A feladat és az állítás

Tekintsük a következő szélsőérték-számítási feladatot!

$$\begin{aligned} f(x) &\to \max_{x\in\mathbb{R}^N} \\ x &\geqq 0 \\ g_1(x) &\leqq 0 \\ &\vdots \\ g_M(x) &\leqq 0, \end{aligned} \tag{1F.1–1}$$

ahol $M \leqq N$. A feladat megoldása általános esetben nem egyszerű, szükséges és egyben elégséges feltételt adni nem tudunk. Van azonban olyan - közgazdasági szempontból - fontos és érdekes eset, amikor viszonylag könnyen célt érhetünk, sőt, a megoldás technikája némileg hasonlít a feltétel nélküli szélsőérték-számítási feladat megoldási módszeréhez. Mi most csak ezzel az esettel foglalkozunk.

Definiáljuk először a feladathoz tartozó ún. *Lagrange-függvény*t. E függvény megadásához minden feltételhez egy (nemnegatív) *duálváltozót* rendelünk, ezek szimbóluma $\lambda_m \geqq 0, m = 1, \ldots, M$. Maga a $\mathcal{L}(x,\lambda) : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}$ függvény a

$$\mathcal{L}(x,\lambda) \triangleq f(x) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \cdot g_m(x)$$

alakot ölti.

Legyen most $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ minden változója szerint folytonosan deriválható függvény és legyenek a $g_m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $m = 1, \ldots, M$ minden változójuk szerint folytonosan deriválható függvények. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_n} &\leqq 0, \quad de \quad = 0, \quad ha\ x_n > 0, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots, N \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial \lambda_m} &\geqq 0, \quad de \quad = 0, \quad ha\ \lambda_m > 0, \qquad \forall m = 1, 2, \ldots, M. \end{aligned}$$

Jelöljük az $(x_1^o, \ldots, x_N^o, \lambda_1^o, \ldots, \lambda_M^o)$ szimbólumokkal az egyenlőtlenség-rendszer megoldását. Ez esetben igaz a következő állítás:

1F.1.1. Tétel (Kuhn-Tucker). *Legyen f konkáv és g_m konvex $m = 1, \ldots, M$-re. Ekkor $(x_1^o, \ldots, x_N^o)$ az (3F.1–1) feladat optimális megoldása. Sőt, ha az (3F.1–1) feladatnak létezik optimális megoldása, akkor az kielégíti a fenti egyenlőtlenség-rendszert.*

Látható, hogy ebben az ún. konvex esetben a feltételes szélsőérték-számítási feladat megoldását egy egyenlőtlenség-rendszer megoldásaként nyerhetjük.[1] Megjegyezzük, hogy a nemkonvex esetben a helyzet kissé bonyolultabb, de mi a közgazdasági kurzusok során nyugodtan feltehetjük a megfelelő konvexitási feltételek teljesülését. Emiatt nyugodtan foglalkozhatunk csak az olyan megoldásokkal, amelyek az egyenletrendszer megoldásai is egyben, és az így nyert $(x_1^o, \ldots, x_N^o, \lambda_1^o, \ldots, \lambda_M^o)$ pont jellemzése is származtatható az egyenletrendszerből.

[1] Ha valaki nem szeret deriválni, örömmel fedezheti fel, hogy az egyenletrendszer második csoportjának alakja az eredeti feladat feltételeivel egyezik meg.

2F. függelék

Dualitás

A mikoökonómiában, különösen a termelési és a fogyasztási elméletben fontos szerepet játszik a dualitás Anélkül, hogy alaposan körüljárnánk a témát, összefoglaljuk azokat a legfontosabb fogalmakat és összefüggéseket, amelyeket a későbbiekben mi is használunk. Ezek a fogalmak a konvex analízis eszköztárához tartoznak, több közülük már ismerős korábbi tanulmányainkból. Ennek ellenére megismételjük őket, főként azért, mert az itt ismertetett alakokra hivatkozunk a későbbiekben. Nem bizonyítunk mindent, a magától értetődő, a korábban – más tárgyakból – már tanult, illetve a nagyon komplikált bizonyításokat mellőzzük.

2F.1. Alapfogalmak

2F.1.1. Definíció. *A $K \subseteq \mathbb{R}^N$ halmaz (szigorúan) konvex, ha tetszőleges két $x^1, x^2 \in K$ pont és $\lambda \in [0,1]$ $(\lambda \in (0,1))$ skalár esetén*

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2 = x^\lambda \in (int)\, K.$$

2F.1.2. Segédtétel. *Két konvex halmaz metszete is konvex.*

2F.1.3. Definíció. *A $0 \neq p \in \mathbb{R}^N$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén a*

$$H\,(p,c) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,| px = c\right\}$$

szabállyal leírható halmazokat hipersíknak *nevezzük. A p vektor, mivel merőleges a hipersíkra, – az angolszász termininológiát követve –* a hipersík normálisa *elnevezést kapta.*
A $0 \neq p \in \mathbb{R}^N$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén a

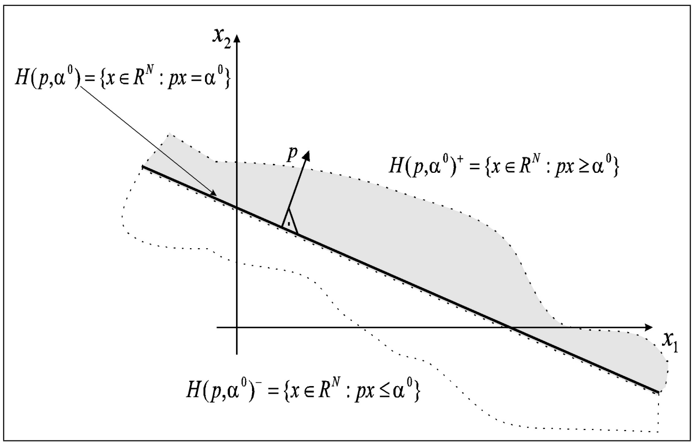
$$H^+\,(p,c) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,| px \geqq c\right\}$$

és

$$H^-\,(p,c) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,| px \leqq c\right\}$$

halmazokat rendre a $H\,(p,c)$ hipersík által adott felső, *illetve* alsó féltér*nek hívjuk.*

Ilyen hipersíkot és féltereket láthatunk az 2F.1.1. ábrán, ahol $c = \alpha^0$.



2F.1.1. ábra: Hipersíkok és félterek

2F.1.4. Segédtétel. *Egy hipersík, illetve egy féltér zárt, konvex halmaz.*

2F.1.5. Következmény. *Félterek nem üres metszete zárt, konvex halmaz.*

2F.1.6. Definíció. *Egy $K \subset \mathbb{R}^N$ halmaz $[conv\, K]$* zárt, konvex burka a *legszűkebb, K-t tartalmazó, $\mathbb{R}^N$-beli zárt, konvex halmaz, azaz az összes, K-t tartalmazó, $\mathbb{R}^N$-beli, zárt, konvex halmaz metszete.*

2F.1.7. Segédtétel. *Ha $K \subset \mathbb{R}^N$ zárt, konvex halmaz, akkor $K = [conv\, K]$.*

A következő két tétel alapvető jelentőségű:

2F.1.8. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$ konvex, zárt halmaz, és legyen $y \notin K$. Ekkor létezik olyan $\mathbb{R}^N$-beli $p \neq 0$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ skalár, hogy*

$$\begin{aligned} py &> c; \\ px &< c, \ \forall x \in K. \end{aligned}$$

2F.1.9. Tétel. *Legyen $B, K \subset \mathbb{R}^N$ konvex halmaz, és $K \cap B = \emptyset$. Ekkor létezik olyan $\mathbb{R}^N$-beli $p \neq 0$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ skalár, hogy*

$$\begin{aligned} py &\geqq c, \forall y \in B; \\ px &\leqq c, \ \forall x \in K. \end{aligned}$$

Más szóval: a két halmaz az őket szeparáló hipersík két oldalán – azaz, az általa generált két féltérben – fekszik.

2F.2. Egy halmaz támaszsíkja

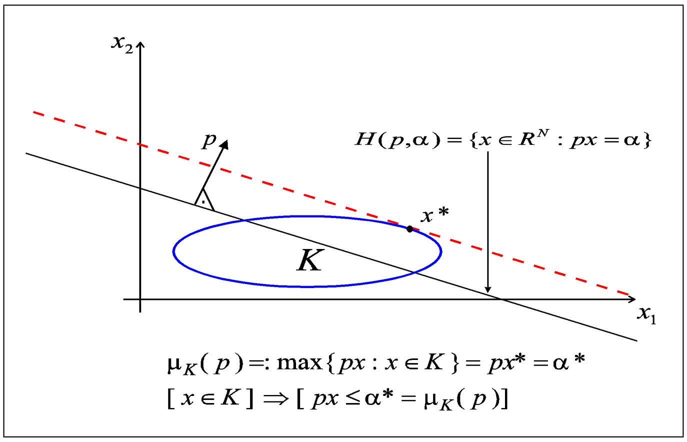
Tekintsünk most egy zárt, konvex $K \subset \mathbb{R}^N$ halmazt, és tegyük fel, hogy létezik olyan $y \in \mathbb{R}^N$ pont, amire $y \notin K$. Ekkor a 2F.1.8. Tételből tudjuk, hogy létezik legalább egy olyan, a $p \neq 0$ vektor mint normális által generált hipersík, ami szeparálja őket. Mivel ez igaz minden olyan $\mathbb{R}^N$-beli pontra, ami nem eleme K-nak, ezért, ha úgy tetszik, a halmazt „leválaszthatjuk" minden rajta kívül elhelyezkedő pontról egy hipersíkkal. Ugyanezt azonban nem tudjuk megtenni olyan ponttal, ami eleme a halmaznak. Úgy tűnik tehát, hogy a K halmaz elemei leírhatóak úgy is, mint az összes olyan féltér metszetében levő pontok, amelyekre ez a szeparáció megvalósítható. Nézzük meg ezt az ötletet kissé alaposabban!

2F.2.1. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$. A K halmaz határpontjának hívunk minden olyan $x \in \mathbb{R}^N$ pontot, amelynek tetszőleges $B(x, \varepsilon > 0)$ környezetében egyaránt létezik K-beli pont, és olyan, ami nem eleme a K halmaznak. A K határpontjainak halmazát a K határának nevezzük és a $\partial K \subset \mathbb{R}^N$ szimbólummal jelöljük.*

2F.2.2. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$, és legyen $p \neq 0$. Ha létezik olyan $x^* \in \partial K$, amire minden $x \in K$ esetén $px \leqq px^* = \alpha^*$, akkor a*

$$H(p, \alpha^*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N \,|py = \alpha^* \right\}$$

hipersíkot a K halmaz támaszsíkjának nevezzük.



2F.2.1. ábra: A K halmaz támaszsíkja az x^* pontban

Ilyen támaszsíkot ábrázol szaggatott piros egyenessel a 2F.2.1. ábra.[2]

[2] Az ábra alján szereplő összefüggésekre később visszatérünk.

2F.2.3. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$ konvex halmaz, és legyen $x^* \notin \operatorname{int} K$. Ekkor létezik olyan $p \in \mathbb{R}^N$, amire $p \neq 0$, és*

$$px^* \geqq px, \quad \forall x \in K\text{-ra.}$$

2F.2.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy egyrészt a K halmaz nem feltétlenül zárt, másrészt a tétel állítása igaz a ∂K halmaz bármely pontjára. Ezek szerint a tétel azt is kimondja, hogy egy konvex halmazhoz minden határpontjában illeszthetünk támaszsíkot.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy, az x^* ponthoz konvergáló $x^q, q = 1, 2, \ldots$ pontsorozatot, amelyre igaz, hogy minden q-ra az x^q pont nem eleme a K halmaz lezártjának. Emiatt az összes, az említett sorozathoz tartozó pont biztos kívül esik a K halmazon. Ekkor a konvex halmazokra vonatkozó szeparációs tétel[3] értelmében minden $q = 1, 2, \ldots$ indexhez létezik olyan $p^q \neq 0$ normálisú hipersík és c^q skalár, hogy

$$p^q x^q > c^q \geqq p^q x, \quad \forall x \in K - ra. \tag{2F.2–1}$$

Vegyük észre: nem sértjük az általánosságot, ha feltesszük,hogy az összes p^q vektor hossza egységnyi, azaz

$$\|p^q\| = 1, \quad \forall q = 1, 2, \ldots \text{ esetén.}$$

Ez ugyanakkor azt is jelenti e p^q vektorok korlátos, végtelen sorozatot alkotnak, amiből a *Bolzano-Weierstrass-* tétel értelmében kiválasztható konvergens részsorozat. Térjünk át erre, és indexeljünk át! Feltehetjük, hogy

$$\lim_{q\to\infty} p^q = p^*,$$

és ebből következően azt is, hogy

$$\lim_{q\to\infty} c^q = c^*.$$

Ha most a (2F.2–1) egyenlőtlenségsorozatnál elvégezzük a határátmenetet, akkor a skaláris szorzat folytonosságából kapjuk, hogy

$$p^* x^* \geqq c^* \geqq p^* x, \quad \forall x \in K - ra.$$

□

Tekintsünk most egy zárt, konvex K halmazt, és az összes olyan $p \in \mathbb{R}^N$ vektort, amire $p \neq 0$ és p a K halmaz támaszsíkja. Ezek halmazát jelöljük a P_K^0 szimbólummal. Az eddigiek értelmében, ha tekintünk $p \in P_K^0$ normálisú támaszsíkot, ami átmegy az $x^p \in \partial K$ ponton, akkor a K halmaz a

$$H(p, px^p) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,| px = px^p \right\}$$

[3] 2F.1.8. Tétel

támaszsík által generált alsó féltérben fekszik. Vegyük e felterek metszetét, ahogy p végigfut a P_K^0 halmazon:

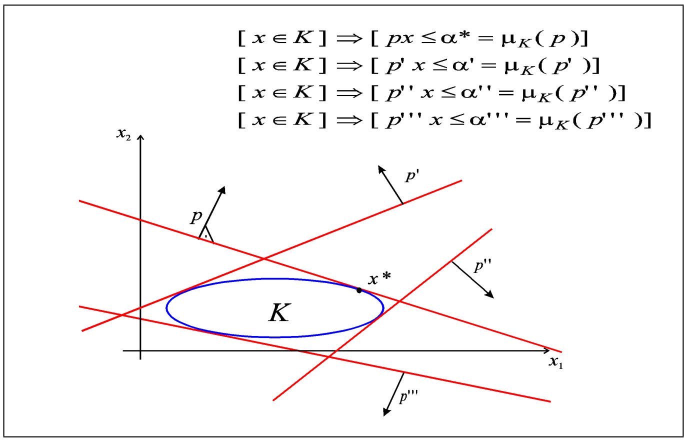
$$\cap_{p \in P_K^0} H^- \left(p, px^p\right).$$

Ez a metszet a 2F.1.5. Következmény értelmében olyan zárt, konvex halmaz, ami tartalmazza K-t! Az is könnyen belátható, hogy nem lehet olyan pontja, ami ne lenne K eleme, mert ekkor egy támaszsíkkal szeparálhattuk volna tőle. Mindezekből kapjuk a következő állítást:

2F.2.5. Tétel. *Legyen K zárt, konvex halmaz. Ekkor*

$$\cap_{p \in P_K^0} H^- \left(p, px^p\right) = K.$$

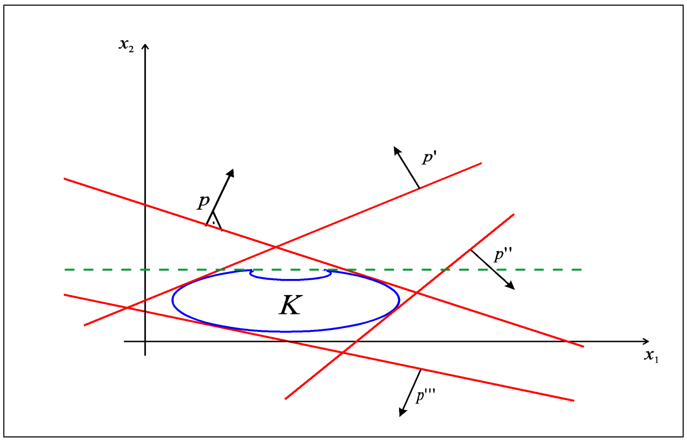
A 2F.2.2. ábra utal erre az összefüggésre, itt – illusztrációként – csak négy támaszsíkot húztunk be. Jól látható, ha egyre több és több támaszsíkot rajzolunk az ábrába, az általuk generált alsó félterek metszete egyre pontosabban közelíti a K halmazt.[4]



2F.2.2. ábra: Konvex, zárt halmaz mint a támaszsíkok generálta alsó félterek metszete

Kicsit más lesz a helyzet, ha a K halmaz nem konvex. Ekkor a támaszsíkjai által generált alsó félterek metszete nyilván nem lehet egyenlő vele, mert az konvex halmaz. Látható azonban, hogy e metszet ekkor a $[conv\, K]$ halmazzal egyezik meg. Ezt az összefüggést illusztrálja a 2F.2.3. ábra, ahol a zöld szaggatott egyenessel jelzett támaszsík által generált alsó féltér nem tudja pontosan „letapogatni” a K halmaz határát. Jól érzékelhető, hogy a konvexitás hiánya miatt léteznek olyan határpontok, amihez nem tudunk támaszsíkot illeszteni, ezért e probléma.

[4] Az ábra felső részén szereplő összefüggések később világossá válnak.



2F.2.3. ábra: A támaszsikok által generált félterek metszete a halmaz zárt, konvex burka

Összefoglalásként: egy zárt, konvex halmaz tökéletesen leírható a támaszsíkjai által generált alsó félterek segítségével. Ezt a leírást *duális leírás*nak nevezzük.

2F.3. A támaszfüggvény és a dualitás

Ha egy zárt, konvex halmazt duális leírással adunk meg, kicsit macerásnak tűnhet az alsó félterekkel való bánásmód. Felmerül a kérdés: nem tudunk-e hasonló duális leírást adni egyszerűbbnek látszó struktúra segítségével? Erre a adunk pozitív választ a következő pontban.

2F.3.1. A támaszfüggvény fogalma, tulajdonságai

Bevezetjük a későbbiekben sokszor használt, nagy fontosságú elemzési eszközünket.

2F.3.1. Definíció. *Tetszőleges zárt $K \subseteq \mathbb{R}^N$ halmaz* támaszfüggvénye *a következő:*

$$\mu_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad \mu_K(p) = \sup\{px \,|x \in K\}.$$

2F.3.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a támaszfüggvény definíciójában csak a px skaláris szorzat K halmaz feletti szuprémumát használjuk. Ez megengedi azt, hogy e skaláris szorzat ne vegye föl a maximális értékét, csak közelítse, valamint lehetőséget ad arra is, hogy egy $p \in \mathbb{R}^N$ vektor esetén a támaszfüggvény a $\mu_K(p) = \infty$ értéket is felvegye.*

A támaszfüggvény szoros kapcsolatban áll a támaszsík fogalmával. Tekintsük ismét a 2F.2.1. ábrát! Itt a zárt K halmaz $x^* \in \partial K$ határpontjában a támaszsíkot megadó (p, α^*) normális vektor és skalár egyben a K halmazhoz tartozó $\mu_K(\cdot)$ támaszfüggvény p vektor melletti

$$\mu_K(p) = \alpha^*$$

értékét is adja. Ez minden olyan esetben érvényes, amikor a támaszfüggvény ténylegesen felveszi a véges maximumát.

Ezt figyelembe véve egy zárt, konvex K halmaz esetén azt mondhatjuk, hogy a halmazhoz tartozó $\mu_K(p)$ támaszfüggvény minden a halmazra vonatkozó információt hordoz, duális leírást szolgáltat, hiszen $\forall p \in \mathbb{R}^N$esetén

$$H^-(p, \mu_K(p)) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \left| px \leqq \mu_K(p) \right. \right\}$$

egy, a K halmazt tartalmazó féltér. Így[5]

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \left| px \leqq \mu_K(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^N\text{-re.} \right. \right\}.$$

Abben az esetben pedig, ha K nem konvex,[6] akkor

$$[conv\, K] = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \left| px \leqq \mu_K(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^N\text{-re.} \right. \right\}.$$

2F.3.3. Tétel. *Egy zárt K halmaz $\mu_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ támaszfüggvénye lineárisan homogén és konvex.*

Bizonyítás: Az első fokú homogenitás triviális. A konvexitás belátásához – az egyszerűség kedvéért – tegyük fel, hogy a szuprémum minden p mellett fel is vevődik, azaz

$$\mu_K(p) = \max\{ px \,|x \in K \}$$

Legyen

$$p^\lambda = \lambda p^1 + (1 - \lambda) p^2, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Ekkor legyen $x^\lambda \in K$ olyan, hogy

$$p^\lambda x^\lambda = \mu_K\left(p^\lambda\right).$$

Ebből

$$\mu_K\left(p^\lambda\right) = \lambda p^1 x^\lambda + (1 - \lambda) p^2 x^\lambda \leqq \lambda \mu_K\left(p^1\right) + (1 - \lambda) \mu_K\left(p^2\right).$$

□

[5] Lásd illusztrációként ismét a 2F.2.2. ábrát!
[6] De zárt!

2F.3.2. A dualitási tétel

A következő tétel egyike a mikroökonómia, illetve a matematikai közgazdaságtan legfontosabb állításainak. Nem bizonyítjuk, mert olyan matematikai eszköztárat igényel,[7] ami nem tananyag. Az egyik irányt, talán a fontosabbat, azért igazoljuk.

2F.3.4. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$ nem üres, zárt halmaz, és legyen $\mu_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a támaszfüggvénye. A $\mu_K(\cdot)$ függvény akkor és csak akkor differenciálható egy $\bar{p}$ pontban, ha létezik olyan egyértelmű $\bar{x} \in K$ pont, hogy*

$$\bar{p}\bar{x} = \mu_K(\bar{p}).$$

Sőt, ekkor

$$\nabla \mu_K(\bar{p}) = \bar{x},$$

azaz

$$\frac{\partial \mu_K(\bar{p})}{\partial p_n} = \bar{x}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Bizonyítás: Csak a szükségességet látjuk be, azt is csak arra az esetre, amikor a definícióban szereplő szuprémum egyben maximum is. Legyen $\mu_K(\cdot)$ differenciálható a $\bar{p}$ pontban, és tekintsük a következő függvényt!

$$\xi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad \xi(p) \triangleq p\bar{x} - \mu_K(p),$$

ahol

$$\bar{x} \in K, \text{ és } \bar{p}\bar{x} = \mu_K(\bar{p}). \tag{2F.3–1}$$

(Ilyen $\bar{x}$ nyilvánvalóan létezik.) A $\xi(\cdot)$ függvényre a definícióból következően igaz, hogy

$$\begin{aligned} \xi(p) &= p\bar{x} - \mu_K(p) \leqq 0 \quad \forall p\text{-re}, \\ \xi(\bar{p}) &= \bar{p}\bar{x} - \mu_K(\bar{p}) = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a $\bar{p}$ pontban maximuma van, és – differenciálható lévén – itt a parciális deriváltjai eltünnek, azaz

$$\frac{\partial \mu_K(\bar{p})}{\partial p_n} - \bar{x}_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Miután azonban ennek igaznak kellene lennie minden olyan $\bar{x}$ pontra, ami kielégíti a (2F.3–1) összefüggéseket, ezért az $\bar{x}$ pont szükségképpen egyértelmű, ellenkező esetben $\mu_K(\cdot)$ nem lehetett volna differenciálható. □

[7] A szubderivált fogalmát.

3F. függelék

Burkolótétel

3F.1. A feladat és az állítás

A burkolótétel egyszerű, de igen fontos állítás. A közgazdaságtan gyakran és igen hatásos módon hivatkozik rá. Először két formában is kimondjuk és bizonyítjuk magát az állítást, majd indokoljuk az elnevezését.

3F.1.1. A feltételes feladat

Tekintsük a következő parametrikus szélsőérték-számítási feladatsereget!

$$\begin{gathered} \max_{x \in \mathbb{R}^N} h(x, q) \\ g_1(x, q) = 0 \\ \vdots \\ g_M(x, q) = 0 \\ q \in \mathbb{R}^S \end{gathered} \tag{3F.1–1}$$

Tegyük fel, hogy ennek minden q-ban van egyértelmű megoldása. Az ehhez tartozó optimális érték legyen $v(q)$ és a megoldás maga legyen $x(q)$. Ezzel nyilvánvalóan két függvényt definiáltunk:

$$\begin{aligned} v() &: \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \\ x() &: \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Az elsőt az (3F.1–1) feladathoz tartozó *értékfüggény*nek nevezzük. Tegyük most fel, hogy mind a két függvény folytonosan differenciálható.

Írjuk fel most a feladathoz tartozó *Lagrange-függvényt:*

$$L(x,q,\lambda) = h(x,q) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m g_m(x,q)$$

Legyenek $\lambda_1(\bar{q}), \lambda_2(\bar{q}), \ldots, \lambda_M(\bar{q})$ az (3F.1–1) feladat $\bar{q}$ paraméteregyüttes melletti $x(\bar{q})$ megoldáshoz tartozó *Lagrange-szorzói,* és ezekre is tegyük fel, hogy folytonosan differenciálható módon függnek a $\bar{q}$ paraméteregyüttestől. Ezek után definiáljuk a következő függvényt:

$$\Lambda(\bar{q}) \triangleq h(x(\bar{q}), \bar{q}) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(\bar{q})\, g_m(x(\bar{q}), \bar{q}),$$

és tegyük fel, hogy ez is folytonosan differenciálható[8]. Ekkor igaz a következő állítás, amely azt mondja ki, hogy egy paraméter változása esetén csak annak a célfüggvényre, illetve a feltételi függvényekre gyakorolt *közvetlen hatása* számít, az optimális megoldáson keresztül gyakorolt *közvetett hatás nem.*

3F.1.1. Tétel (Burkolótétel). *A fenti feltételek mellett* $\forall s = 1, \ldots, S - re$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial q_s}(\bar{q}) &= \frac{\partial \Lambda}{\partial q_s}(\bar{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_s}(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q})) = \\
&= \frac{\partial h}{\partial q_s}(x(\bar{q}), \bar{q}) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m(\bar{q}) \frac{\partial g_m}{\partial q_s}(x(\bar{q}), \bar{q}).
\end{aligned}$$

Bizonyítás: Először nézzük meg a

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_s}(\bar{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_s}(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q}))$$

egyenlőséget. Differenciálva a

$$\Lambda(\bar{q}) \equiv L(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q}))$$

azonosságot kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial q_s}(\bar{q}) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_n}(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q})) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_s}(\bar{q}) + \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial q_s}(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q})) + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q})) \cdot \frac{\partial \lambda_m}{\partial q_s}(\bar{q}).
\end{aligned}$$

[8] Vegyük észre, hogy $\Lambda(\bar{q}) \equiv L(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q}))$.

Ezt tovább alakítva:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_s}(\bar{q}) \quad = \quad & \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial h}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)-\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\bar{q}\right)\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)\right)\frac{\partial x_n}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right)+\\ & +\frac{\partial L}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q},\lambda\left(\bar{q}\right)\right)+\\ & \sum_{m=1}^{M} g_m\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)\frac{\partial \lambda_m}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right).\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy az első és a harmadik tag zérus, hiszen $x\left(\bar{q}\right)$ kielégíti mind az optimalitás, mind az eredeti feladat (szükséges) feltételeit, tehát

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_s}(\bar{q})=\frac{\partial L}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q},\lambda\left(\bar{q}\right)\right)$$

Tekintsük most a

$$v(\bar{q})\equiv h\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)$$

azonosságot. Ezt differenciálva $\forall s=1,\ldots,S-re$ kapjuk a következő összefüggést:

$$\frac{\partial v}{\partial q_s}(\bar{q})=\frac{\partial h}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial h}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right).$$

Az (3F.1–1) maximumfeladat elsőrendű feltételeiből $\forall n-re$ azt nyerjük, hogy

$$\frac{\partial h}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)=\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\bar{q}\right)\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right),$$

így a szummák felcserélésével $s=1,\ldots,S-re$ a

$$\frac{\partial v}{\partial q_s}(\bar{q})=\frac{\partial h}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)+\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\bar{q}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right)\tag{3F.1–2}$$

egyenlőségekhez jutunk.

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy az $x\left(\bar{q}\right)$ megoldás kielégíti az (3F.1–1) feladat feltételeit, ezért azokat differenciálva, majd a kapott azonosságokat átrendezve kapjuk, hogy $s=1,\ldots,S-re$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right)=-\frac{\partial g_m}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right).$$

Ha ezt visszehelyettesítjük az (3F.1–2) egyenlőségekbe, akkor $s=1,\ldots,S-re$

$$\frac{\partial v}{\partial q_s}(\bar{q})=\frac{\partial h}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)-\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\bar{q}\right)\frac{\partial g_m}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q},\lambda\left(\bar{q}\right)\right),$$

azaz az értékfüggvény parciális deriváltjai a $\bar{q}$ pontban megegyeznek a feladathoz rendelt *Lagrange-függvény* parciális deriváltjaival, ha az x és a λ változók értékét az $x\left(\bar{q}\right)$ és a $\lambda\left(\bar{q}\right)$ nagyságokon rögzítjük. □

3F.1.2. A feltétel nélküli feladat

A feltétel nélküli szélsőérték-számítási feladatra vonatkozó burkolótétel a fentiekből már egyszerű megjegyzésként adódik. A feladat:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^N} h\left(x,q\right).$$

Legyen ennek megoldása a $\bar{q}$ paraméteregyüttes mellett $x\left(\bar{q}\right)$. Legyen ez folytonosan differenciálható. A feladat feltételezetten differenciálható $v\left(\right):\mathbb{R}^S\to\mathbb{R}$ értékfüggvényének értéke $v\left(\bar{q}\right)=h\left(x\left(\bar{q}\right),q\right)$. Ekkor $\forall s=1,\ldots,S-re$

$$\frac{\partial v}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right)=\frac{\partial h}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),q\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial h}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),q\right)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right).$$

Az optimális megoldás szükséges feltételei miatt $\forall n=1,\ldots,N-re$

$$\frac{\partial h}{\partial x_n}\left(x\left(\bar{q}\right),q\right)=0,$$

így $\forall s=1,\ldots,S-re$

$$\frac{\partial v}{\partial q_s}\left(\bar{q}\right)=\frac{\partial h}{\partial q_s}\left(x\left(\bar{q}\right),q\right),$$

azaz itt is csak a paramétereknek a célfüggvényre gyakorolt közvetlen hatása "számít".

3F.1.3. A tétel értelmezése

Az eddig elmondottakból nem látszik azonnal, miből is származik a tétel elnevezése. Most röviden indokoljuk a névadást.

Változtassunk egy kicsit a feladaton, oly módon, hogy kiválasztunk egy paramétert – legyen ez az általánosság megsértése nélkül az utolsó, azaz q_S –, és tegyük fel, ez is döntési változó.

Ez esetben az optimális megoldás szükséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial v}{\partial q_S}\left(\bar{q}\right)=\frac{\partial h}{\partial q_S}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)-\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\bar{q}\right)\frac{\partial g_m}{\partial q_S}\left(x\left(\bar{q}\right),\bar{q}\right)=0$$

egyenlőség fennálljon.

Jelölje r a következő vektort: $r=\left(q_1,\ldots,q_{S-1}\right)$, azaz $q\triangleq\left(r,q_S\right)$, és legyen

$$\phi\left(V,r,q_S\right)\triangleq V-v\left(q\right),\text{ valamint }\varphi\left(r,q_S\right)\triangleq\frac{\partial v}{\partial q_S}\left(q\right).$$

Ha rögzítjük a q_S változót a q_S^0 értéken, akkor a $\phi\left(V,r,q_S^0\right)=0$ egyenlőség egy felületet definiál a $\left(V,r\right)\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{S-1}$ térben. Ha engedjük, hogy q_S változzon, akkor e felületek egy családját kapjuk. Figyelembe véve, hogy $\varphi(r, q_S) = 0$, nyerjük e felületcsalád a

$$\beta(V, r) = 0$$

képlettel definiált felső *burkolóját.* E burkoló tulajdonsága, ha egyáltalán létezik, hogy bármelyik pontja legalább egy felületet *érint*, és bármelyik felületet a burkoló legalább egy pontja *érinti.*

Illusztrációként nézzük azt a feltétel nélküli esetet, amikor $N = 1$ és $S = 2$. Ekkor minden rögzített q^0esetén

$$v\left(r, q^0\right) = \max_{x \in \mathbb{R}} h\left(x, r, q^0\right),$$

és így a $V(r) - v\left(r, q^0\right) = 0$ összefüggés minden r értékhez egy $V(r)$ valós számot rendel. Ez tehát minden q^0 esetén nem más, mint egy egyváltozós függvény, ami a valós számegyenes fölött van értelmezve. Ha a q paramétert változni engedem, akkor ezzel végtelen sok függvényt definiálok, és ezek közül választom ki a maximális függvényértékűt minden r felett:

$$v(r, q) = \max_{x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}} h(x, r, q).$$

A $V(r) - v(r, q) = 0$ összefüggés továbbra is minden r értékhez egy olyan $V(r)$ valós számot rendel, amely mellett a

$$\frac{\partial v}{\partial q}(r, q) = 0$$

egyenlőség is fennáll. Ennek a $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a gráfja az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ térben egy

$$\beta(V(r), r) = 0$$

burkolófelület, ami az előző függvénycsaládot felülről borítja be.

3F.2. Alkalmazások

A továbbiakban a burkolótétel néhány egyszerű alkalmazását vesszük szemügyre. Látni fogjuk a tétel erejét, segítségével egyes közgazdasági állítások bizonyítását meglepően könnyen elintézhetjük. A példákban szereplő közgazdasági fogalmakat ismertnek tekintjük.

3F.2.1. A *Lagrange-multiplikátorok* értelmezése

Tekintsük most a következő parametrikus szélsőérték-számítási feladatot!

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^N} h(x) \\ &\hat{g}_1(x) = q_1 \\ &\qquad\vdots \\ &\hat{g}_M(x) = q_M \end{aligned} \tag{3F.2–1}$$

Definiáljuk a $g_m : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, $m = 1, \ldots, M$ függvényeket a

$$g_m(x, q) = \hat{g}_m(x) - q_m$$

szabállyal, és tekintsük most a

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^N} h(x) \\ &g_1(x, q) = 0 \\ &\qquad\vdots \\ &g_M(x, q) = 0 \end{aligned} \tag{3F.2–2}$$

feladatot. A *Lagrange-függvény:*

$$L\left(x, q, \lambda \in \mathbb{R}^M\right) = h(x) - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m\left(\hat{g}_m(x) - q_m\right).$$

Ha mind az $x(q)$ megoldásfüggvényekre, mind a $v(q)$ értékfüggvényre felteszem a folytonos differenciálhatóságot a burkolótétel értelmében a $\bar{q}$ paraméteregyüttes esetén $\forall m = 1, \ldots, M - re$

$$\frac{\partial v}{\partial q_m}(\bar{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_m}(x(\bar{q}), \bar{q}, \lambda(\bar{q})) = \lambda_m(\bar{q}).$$

Ezek szerint a feltételi egyenlőségekhez (egyenlőtlenségekhez, ha kötnek) rendelt duálváltozónak az optimumban természetes jelentése van: nagysága megmutatja, mennyivel változik a célfüggvény értéke, ha az egyenlőségben szereplő korlát "egy kicsit" (infitezimálisan) megváltozik. Ha a feladatban a korlát egy erőforrás rendelkezésre álló mennyiségét jelenti, akkor a hozzá tartozó duálváltozó értéke az optimumban az erőforrás "*árnyékár*a."

3F.2.2. A *Hotelling-lemma*

Tekintsük annak a termelőegységnek az egyszerű profitmaximalizálási problémáját, amelyik egy terméket bocsájt ki n input felhasználásával

$$\begin{aligned} &\max_{y\in\mathbb{R}_+, z\in\mathbb{R}_+^N} py - wz \\ &y - f(z) = 0 \end{aligned}$$

Itt a feltételt egyenlőséggel adtuk meg, mert feltettük, hogy a határtermékek minden inputfelhasználási szinten pozitívak.

A paraméterek ebben a feladatban a p, illetve w árak. Jelöljük a feladat adott $(\bar{p},\bar{w})>0$ árak melletti optimális megoldásait az $y(\bar{p},\bar{w})$, illetve $z_n(\bar{p},\bar{w})$, $\quad n=1,\dots N$ szimbólumokkal, ahol $y(\bar{p},\bar{w})$ a kínálati függvény, $z_n(\bar{p},\bar{w})$, $\quad n=1,\dots N$ pedig az inputkeresleti függvények.[9] A feladat *Lagrange-függvénye*:

$$L(y,z,p,w,\lambda)=py-wz-\lambda(y-f(z)).$$

A feladatban a

$$\pi(p,w)=py(p,w)-\sum_{n=1}^{N}w_nz_n(p,w)$$

profitfüggvény az értékfüggvény, a termelési függvénnyel adott feltétel pedig nem függ a paraméterektől. A burkolótétel értelmében

$$\frac{\partial\pi}{\partial p}(\bar{p},\bar{w})=\frac{\partial L}{\partial p}(y(\bar{p},\bar{w}),z(\bar{p},\bar{w}),\bar{p},\bar{w},\lambda(\bar{p},\bar{w}))=$$
$$=\frac{\partial}{\partial p}(\bar{p}y(\bar{p},\bar{w})-\bar{w}z(\bar{p},\bar{w}))-\lambda(\bar{p},\bar{w})\frac{\partial}{\partial p}(y(\bar{p},\bar{w})-f(z(\bar{p},\bar{w})))=y(\bar{p},\bar{w}),$$

illetve $n=1,\dots,N-re$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w_n}(\bar{p},\bar{w})=\frac{\partial L}{\partial w_n}(y(\bar{p},\bar{w}),z(\bar{p},\bar{w}),\bar{p},\bar{w},\lambda(\bar{p},\bar{w}))=$$
$$=\frac{\partial}{\partial w_n}(\bar{p}y(\bar{p},\bar{w})-\bar{w}z(\bar{p},\bar{w}))-\lambda(p,w)\frac{\partial}{\partial w_n}(y(\bar{p},\bar{w})-f(z(\bar{p},\bar{w})))=-z_n(\bar{p},\bar{w}).$$

Szavakkal összefoglalva: a profitfüggvény ismeretében mind az optimális kínálat, mind az optimális inputkeresletek egyszerű deriválással meghatározhatók. A profitfüggvény termékár szerinti parciális deriváltja a kínálatot, az inputárak szerinti parciális deriváltjai pedig az inputkeresletek ellentetjét adják.

Természetesen ez az ún. *Hotelling-lemma* nem csak erre az egyszerű esetre igaz, a profitmaximalizálási feladatot nettó szemléletmódban, akár több termékre felírva ugyanezt kapjuk:

$$\max_{y\in\mathbb{R}^N} py$$
$$g(y)=0,$$

[9] Miután a feladatot a nemnegatív orthans fölött definiáltuk, a szélsőértékek létezésének szükséges feltételei egyenlőtlenség formájában adottak a megfelelő komplementaritási feltételekkel együtt. Annak érdekében, hogy ezt a problémát kiküszöböljük, tegyük fel az optimális megoldások pozitivitását. Ebben az esetben a primálváltozókra vonatkozó szükséges feltételek egyenlőségek lesznek.

ahol $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a technológia transzformációs függvénye, azaz a hatékony termelési tervek halmaza. Tudjuk, ha az árak pozitívak, a profitot maximalizáló termelés csak ebből a halmazból kerülhet ki. A feladat *Lagrange-függvénye*:

$$L\left(y, p, \lambda \in \mathbb{R}\right) = py - \lambda g\left(y\right)$$

Legyen a p árrendszerben a feladat optimális megoldása $y(p)$, ekkor az értékfüggvény a $\pi\left(p\right) = py\left(p\right)$ alakot ölti. A fenti gondolatmenethez teljesen hasonlóan: $n = 1, \ldots, N - re$,

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_n}\left(\bar{p}\right) = \frac{\partial L}{\partial p_n}\left(y\left(\bar{p}\right), \bar{p}, \lambda\left(\bar{p}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial p_n}\left(py\left(\bar{p}\right)\right) - \lambda\left(\bar{p}\right)\frac{\partial g}{\partial p_n}\left(y\left(\bar{p}\right)\right) = y_n(\bar{p}).$$

Természetesen ebben az esetben, miután nincs előjel megkötés a jószágokra - egyaránt lehetnek kibocsájtott, vagy felhasznált javak - a parciális deriváltak a nettó kibocsájtást adják.

3F.2.3. A *Shephard-lemma*

A profitmaximalizálás után rátérünk a költségminimalizálási feladatra. A termelő által felhasznált inputokat a $z \in \mathbb{R}^N_+$ vektorral, ezek árát a $w \in \mathbb{R}^N_{++}$ vektorral, a cég termelési függvényét az $f : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}_+$, valamint az ebben a feladatban paraméterként, előírt termelésként adott kibocsájtását az y szimbólummal jelöljük. A feladat e szerint:

$$\min_{z \in \mathbb{R}^N_+} wz$$
$$f\left(z\right) \geqq y$$

Ha most is feltesszük a határtermékek pozitivitását, akkor a feladat pontosan olyan alakra hozható, mint amit az eddigiekben is kezeltünk:

$$\max_{z \in \mathbb{R}^N_+} \left(-w\right) z$$
$$y - f\left(z\right) = 0.$$

A feladathoz tartozó értékfüggvény a jól ismert hosszú távú $C\left(w, y\right)$ költségfüggvény ellentetje. Erről tegyük fel, hogy differenciálható. A *Lagrange-függvény*:

$$L\left(z, w, y, \lambda \in \mathbb{R}\right) = -wz - \lambda\left(y - f\left(z\right)\right)$$

Legyen a (w, y) paraméterértékek mellett az optimális megoldás $z\left(w, y\right)$, ekkor az értékfüggvény $v\left(w, y\right) = -wz\left(w, y\right)$. A burkolótétel értelmében

$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(\bar{w}, \bar{y}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}\left(z\left(\bar{w}, \bar{y}\right), \bar{w}, \bar{y}, \lambda\left(\bar{w}, \bar{y}\right)\right) = -\lambda\left(\bar{w}, \bar{y}\right),$$

és $\forall n = 1, \ldots, N - re$

$$\frac{\partial v}{\partial w_n}(\bar{w}, \bar{y}) = \frac{\partial L}{\partial w_n}(z(\bar{w}, \bar{y}), \bar{w}, \bar{y}, \lambda(\bar{w}, \bar{y})) = -z_n(\bar{w}, \bar{y}).$$

Miután - amint arra már felhívtuk a figyelmet - az értékfüggvény itt a költségfüggvény ellentetje, ezeknek az eredményeknek igen egyszerű és ismert közgazdasági interpretációja van:

$$\frac{\partial C}{\partial y}(\bar{w}, \bar{y}) = MC(\bar{w}, \bar{y}) = \lambda(\bar{w}, \bar{y}),$$

azaz a feltételhez rendelt duálváltozó az $(\bar{w}, \bar{y})$ pontban az y termelés $MC(\bar{w}, \bar{y})$ *határköltsége*, illetve $\forall n = 1, \ldots, N - re$

$$\frac{\partial C}{\partial w_n}(\bar{w}, \bar{y}) = z_n(\bar{w}, \bar{y}),$$

azaz a költségfüggvény inputárak szerinti parciális deriváltjai az egyértelmű költségminimalizáló inputszerkezetet adják. Ez utóbbit szokás az úgynevezett *Shephard-lemma* egyik változatának tekinteni, annak ellenére, hogy a *Shephard-lemma* ennél többet állít.[10]

3F.2.4. A rövid és hosszú távú költségfüggvények kapcsolata

Tekintsük most ismét az előző pont költségminimalizálási feladatát, de módosítsunk rajta egy kicsit! Tegyük fel, hogy az N inputtényező mellett szerepet kap még egy, amit a k szimbólummal jelölünk, és termelési üzemméretként gondolunk rá. A termelési függvény ebben a változójában is legyen deriválható, valamint az üzemméret határterméke legyen pozitív. Tegyük fel azt is, hogy ehhez a k üzemmérethez $\gamma(k)$ állandóköltség, azaz a termelés szintjétől független költség társul, ahol $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, szigorúan konvex, kétszer folytonosan deriválható függvény. A feladat ezek után:

$$\max_{z \in \mathbb{R}^N_+} -(wz + \gamma(k))$$
$$y - f(z, k) = 0,$$

a hozzá tartozó *Lagrange-függvény* pedig

$$L(z, w, y, k, \lambda \in \mathbb{R}) = -(wz + \gamma(k)) - \lambda(y - f(z, k)).$$

A feladatban $N + 2$ paraméter szerepel: az N darab inputár, az y előírt termelési nagyság és a k üzemméret. Egy (w, y, k) paraméteregyüttes melletti megoldást $\forall n = 1, \ldots, N - re$ a $z_n(w, y, k)$ feltételes tényezőkeresletek adják. Ezekről –

[10] Nevezetesen ennek az eredménynek a megfordítását is: ha létezik egyértelmű költségminimalizáló inputszerkezet, akkor a költségfüggvény az inputárakban folytonosan differenciálható.

szokás szerint – feltesszük a folytonos differenciálhatóságot, ahogy a $\lambda(w,y,k)$ multiplikátorfüggvényre is. Az értékfüggvény ezek után:

$$v(w,y,k) = -\sum_{n=1}^{N} w_n z_n(w,y,k) - \gamma(k),$$

ami nyilván nem más, mint a feladathoz tartozó $C(w,y,k)$ teljesköltségfüggvény ellentetje, aminek a folytonos differenciálhatóságát szintén feltesszük.

A burkolótétel értelmében:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right) = -\lambda\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right), \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial C}{\partial y}\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right) = \lambda\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right),$$

és

$$\frac{\partial v}{\partial k}\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right) = \frac{\partial L}{\partial k}\left(z\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right),\bar{w},\bar{y},\bar{k},\lambda\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right)\right) =$$
$$= -\frac{d\gamma}{dk}\left(\bar{k}\right) + \lambda\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right)\frac{\partial f}{\partial k}\left(z\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right),\bar{k}\right),$$

azaz

$$\frac{\partial C}{\partial k}\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right) = \frac{d\gamma}{dk}\left(\bar{k}\right) - \lambda\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right)\frac{\partial f}{\partial k}\left(z\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right),\bar{k}\right).$$

Tegyük fel – az egyszerűség kedvéért –, hogy a továbbiakban a w paraméterek értéke rögzített, és definiáljuk a következő függvényt:

$$\phi(C,y,k) \triangleq C - C(y,k).$$

Ha most a k nagyságát is rögzítjük a k^0 értéken, akkor a

$$\phi\left(C,y,k^0\right) = 0$$

összefüggés a $C_s\left(y,k^0\right)$ rövid távú költségfüggvény gráfját adja az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ térben.

Hosszú távon természetesen a k is változhat, de az optimalitási feltétel miatt eleget kell tennie a következő két egyenlőségnek:[11]

$$\phi(C,y,k) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \phi}{\partial k}(C,y,k) = 0.$$

Ez a két egyenlőség már egyértelmű kapcsolatot teremt az y és a C változók között: minden y értékhez hozzárendeli az optimális $k(y)$ értéken keresztül a hosszú távú minimális költséget. Erre a $C_l(y): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre nyilván igaz, hogy

$$C_l(y) = C_s(y,k(y)) \tag{3F.2–3}$$

és ennek a hosszú távú költségfüggvénynek a gráfja az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ térben nyilván a $C_s\left(y,k^0\right)$ rövid távú költségfüggvények *alsó burkolója*.[12] A (3F.1–2) összefüggésből

[11] Érdemes meggondolni, mit is jelent ez az optimalitási feltétel:

$$\frac{d\gamma}{dk}\left(\bar{k}\right) = \lambda\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right)\frac{\partial f}{\partial k}\left(z\left(\bar{w},\bar{y},\bar{k}\right),\bar{k}\right),$$

azaz optimumban az üzemméret határköltségen értékelt határtermékértéke egyenlő a tényező határ(fix)költségével.

[12] Azért alsó burkoló, mert a költségfüggvény az értékfüggvény ellentetje.

természetes módon adódnak a hosszú és a rövid távot jellemző további tulajdonságok:

- minden $y^* > 0$ pozitív termelés mellett

$$LATC(y^*) = \frac{C_l(y^*)}{y^*} = \frac{C_s(y^*, k^*(y^*))}{y^*} = SATC(y^*, k^*(y^*)),$$

  vagyis a hosszú és a $k^*(y^*)$ üzemmérethez tartozó rövid távú átlagköltség egyenlő;

- minden $y^* > 0$ pozitív termelés mellett a burkolótétel értelmében

$$\begin{aligned} LMC(y^*) &= \frac{\mathrm{d}C_l}{\mathrm{d}y}(y^*) = \frac{\partial C_s}{\partial y}(y^*, k^*(y^*)) + \frac{\partial C_s}{\partial k}(y^*, k^*(y^*)) \cdot \frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}y}(y^*) = \\ &= \frac{\partial C_s}{\partial y}(y^*, k^*(y^*)) + 0 \cdot \frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}y}(y^*) = SMC(y^*, k^*(y^*)), \end{aligned}$$

  azaz a hosszú és a $k^*(y^*)$ üzemmérethez tartozó rövid távú határköltség egyenlő.

3F.2.5. A *Roy-azonosság*

Utolsó alkalmazásként tekintsük most egy fogyasztó optimalizálási feladatát, aki $w > 0$ pénzbeli vagyona (jövedelme) és az általa elfogadott $p \in \mathbb{R}^N_{++}$ árak mellett a fogyasztásból származó hasznát maximalizálja. Preferenciáit az $u : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény reprezentálja, amiről feltesszük a szokásos differenciálhatósági és konkavitási feltételeket, valamint a lokális telhetetlenséget. Feladata ezek után:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^N_+} u(x)$$
$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_n = w.$$

A feladathoz tartozó *Lagrange-függvény*:

$$L(x, p, w, \lambda \in \mathbb{R}) = u(x) - \lambda \left(\sum_{n=1}^{N} p_n x_n - w \right).$$

Legyen a (p, w)paraméterértékek mellett az optimális megoldás $x(p, w)$, amiről természetesen szintén feltesszük a folytonos differenciálhatóságot, valamint a hozzájuk tartozó *Lagrange-szorzó* $\lambda(p, w)$. Az értékfüggvény ezután

$$v(p, w) = u[x(p, w)],$$

ezt a fogyasztó *indirekt* vagy *közvetett hasznossági függvény*ének hívjuk.

A burkolótétel értelmében

$$\frac{\partial v}{\partial w}(\bar{p},\bar{w}) = \frac{\partial L}{\partial w}(x(\bar{p},\bar{w}),\bar{p},\bar{w},\lambda(\bar{p},\bar{w})) = \lambda(\bar{p},\bar{w}),$$

és $\forall n = 1,\ldots,N-re$

$$\frac{\partial v}{\partial p_n}(\bar{p},\bar{w}) = \frac{\partial L}{\partial p_n}(x(\bar{p},\bar{w}),\bar{p},\bar{w},\lambda(\bar{p},\bar{w})) = -\lambda(\bar{p},\bar{w})\,x_n(\bar{p},\bar{w}).$$

Az első egyenlőség – nem meglepő módon – azt jelenti, hogy a vagyonhoz az optimumban rendelt *Lagrange-szorzó* éppen a vagyon határhasznát adja, míg a további N egyenlőség arra világít rá, hogy az árak növekedésével a fogyasztó elérhető maximális haszna csökken. Az egyenlőségek kombinálásával pedig a fogyasztó $(\bar{p},\bar{w})$ árak és vagyon melletti *walrasi keresletét* kapjuk: $\forall n = 1,\ldots,N-re$

$$x_n(\bar{p},\bar{w}) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_n}(\bar{p},\bar{w})}{\frac{\partial v}{\partial w}(\bar{p},\bar{w})}.$$

Ezt az utóbbi összefüggést szokás *Roy-azonosságnak* is nevezni. Ennek értelmében a fogyasztó kereslete az indirekt hasznossági függvényből azonnal nyerhető, nem szükséges megoldani a feltételes szélsőérték-számítási feladatot. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy az indirekt hasznossági függvény – noha első pillantásra a megfigyelhető (p,w) paraméterektől függ – a nem megfigyelhető preferenciák reprezentációja, így maga sem megfigyelhető.

4F. függelék

Pont–halmaz leképezések

4F.1. Alapfogalmak, tételek

Ebben az szakaszban röviden összefoglaljuk azokat a definíciókat és tételeket, amelyekre az egyensúly létezésének szempontjából szükségünk lesz. Miután ezek a fogalmak minket e helyütt kizárólag e szempontból érdekelnek, ezért a közgazdasági szakirodalomban általában szereplő alakjukat adjuk meg, nem törekszünk a teljes általánosságra. Két alapvető állítás kivételével a bizonyításokat is megadjuk. A tárgyalásmód igen száraz, az értelmező megjegyzésektől mentes lesz. Először a megszokott függvényfogalom általánosításával foglalkozunk.

4F.1.1. Definíció (Pont-halmaz leképezések). *Legyen S és T az N dimenziós euklideszi tér két nemüres részhalmaza, azaz $S, T \subset \mathcal{R}^N$. A Φ* pont–halmaz (halmazértékű) leképezés, *ha S minden pontjához T egy* nemüres részhalmazát *rendeli. Ezt többféleképpen jelölhetjük:*

$$\Phi : S \to 2^{T \setminus \emptyset}, \quad vagy \quad \Phi : S \rightrightarrows T, \quad vagy \quad \Phi(s) \subset T, \forall s \in S$$

Egy Φ pont–halmaz leképzés G gráfja *az $S \times T$ szorzathalmaz egy olyan részhalmaza, amire*

$$G(\Phi) = \{(s,t) \in S \times T \,|t \in \Phi(s)\}.$$

A Φ pont–halmaz leképezés konvex értékű, *ha $\forall s \in S$-re $\Phi(s)$ konvex halmaz.*

4F.1.2. Definíció. *A Φ pont–halmaz leképezés egy $s^\circ \in S$ pontban* felülről félig folytonos (f.f.f.), *ha egy tetszőleges, az s° ponthozhoz konvergáló $s^q \in S$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatra és egy olyan, a t° ponthoz konvergáló $t^q \in T$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatra, amikre $t^q \in \Phi(s^q)$, a $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$ tartalmazás következik, azaz:*

$$[s^q \to s^\circ, \, t^q \to t^\circ, t^q \in \Phi(s^q)] \Longrightarrow [t^\circ \in \Phi(s^\circ)].$$

A Φ pont–halmaz leképezés felülről félig folytonos, *ha S minden pontjában az.*

4F.1.3. Definíció. *A* Φ *pont–halmaz leképezés egy* $s^\circ \in S$ *pontban* alulról félig folytonos (a.f.f.), *ha egy tetszőleges, az* s°*ponthoz konvergáló* $s^q \in S$, $q = 1, 2, \ldots$ *sorozatra és egy* $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$ *pontra létezik egy, a* t°*-hoz konvergáló* $t^q \in \Phi(s^q)$, $q = 1, 2, \ldots$ *sorozat, azaz:*

$$[s^q \to s^\circ, t^\circ \in \Phi(s^\circ)] \Longrightarrow [\exists\, t^q \to t^\circ, t^q \in \Phi(s^q)]\,.$$

A Φ *pont–halmaz leképezés* alulról félig folytonos, *ha* S *minden pontjában az.*

4F.1.4. Definíció. *A* Φ *pont–halmaz leképezés egy* $s^\circ \in S$ *pontban* folytonos, *ha ugyanitt egyszerre* f.f.f. *és* a.f.f, *és értelemszerűen folytonos, ha* S *minden pontjában az.*

4F.1.5. Megjegyzés. *A definíciókból látható (vagy ha nem, triviálsan bizonyítható), hogy egy* Φ *pont–halmaz leképezés akkor és csak akkor* f.f.f., *ha gráfja zárt.*

4F.1.6. Megjegyzés. *Ha* T *korlátos, akkor a hagyományos függvények folytonossága a pont-pont leképezésekre vonatkozó alulról, illetve felülről félig folytonossággal egyaránt ekvivalens. Itt kell felhívnunk a figyelmet arra, hogy a hagyományos függvényekre vonatkozó alulról és felülről félig folytonosság más fogalom. Ezért az utóbbiakat egy kicsit más névvel illetjük. Egy* φ *valós függvény az* s° *pontban* lentről félig folytonos (l.f.f.), *ha minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists$ *olyan* $\mathcal{U}(s^\circ)$ *környezet, hogy az* $s \in \mathcal{U}(s^\circ)$ *tartalmazásból a* $\varphi(s) \geqq \varphi(s^\circ) - \varepsilon$ *reláció következik. A* φ *függvény* l.f.f., *ha értelmezési tartományának minden pontjában az. Ugyanakkor egy* φ *valós függvény az* s° *pontban* fentről félig folytonos (f_p.f.f)[13]., *ha minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists$ *olyan* $\mathcal{U}(s^\circ)$ *környezet, hogy az* $s \in \mathcal{U}(s^\circ)$ *tartalmazásból a* $\varphi(s) \leqq \varphi(s^\circ) + \varepsilon$ *reláció következik. A* φ *függvény* f_p.f.f., *ha értelmezési tartományának minden pontjában az.*

A következő két állítás a *f.f.f.* pont–halmaz leképezésekre vonatkozik.

4F.1.7. Állítás. *Legyen* $\Phi : S \rightrightarrows T_1$ *és* $\Psi : S \rightrightarrows T_2$ *két* f.f.f. *ponthalmaz leképezés, valamint legyen* T_1 *és* T_2 *korlátos. Ekkor a*

$$\begin{aligned}(\Phi \times \Psi)(s) &= \Phi(s) \times \Psi(s),\\ (\Phi + \Psi)(s) &= \Phi(s) + \Psi(s)\end{aligned}$$

szorzat-, illetve összegleképezések is f.f.f.*-ak.*

Bizonyítás. Triviális, a definíciók közvetlen folyománya. $\square$

A következő fogalom és állítás annyira fontos, hogy külön megadjuk a pont-–pont leképezésekre vonatkozó alakját is.[14]

[13] A p alsóindex a pont-$p$ont leképézésre utal.
[14] Ez a két állítás az, amit nem bizonyítunk.

4F.1.8. Definíció. *Legyen $f : S \to S$ egy pont-pont leképezés (függvény). Az $s^* \in S$ pontot az f leképezés fixpontjának mondjuk, ha $f(s^*) = s^*$.*

4F.1.9. Tétel (Brouwer). *Legyen $S \subset \mathcal{R}^N$ nemüres, zárt, korlátos, konvex részhalmaza és $f : S \to S$ függvény folytonos. Ekkor az f függvénynek létezik fixpontja, azaz $\exists\, s^* \in S$, amire $f(s^*) = s^*$.*

4F.1.10. Definíció. *Legyen $\Phi : S \rightrightarrows S$ egy pont–halmaz leképezés. Az $s^* \in S$ pontot az Φ leképezés fixpontjának mondjuk, ha $s^* \in \Phi(s^*)$.*

4F.1.11. Tétel (Kakutani). *Legyen $S \subset \mathcal{R}^N$ nemüres, zárt, korlátos és konvex, valamint legyen $\Phi : S \rightrightarrows S$ egy* f.f.f., *konvexértékű pont–halmaz leképezés. Ekkor Φ-nek létezik fixpontja, azaz $\exists\, s^* \in S$, amire $s^* \in \Phi(s^*)$.*

4F.2. A Berge-féle maximumtétel

A következő tételt is többször használjuk majd a későbbiek során, jelentősége alapvető.

4F.2.1. Tétel (Berge). *Legyen $S \subset \mathcal{R}^N$, valamint $T \subset \mathcal{R}^N$ korlátos, valamint $\Phi : S \rightrightarrows T$ folytonos. Legyen $f : S \times T \to \mathcal{R}$ folytonos valós függvény. Definiáljuk a $\mu : S \rightrightarrows T$ pont–halmaz leképezést a*

$$\mu(s) = \left\{ t \in \Phi(s) \,\middle|\, f(s,t) = \max_{v \in \Phi(s)} f(s,v) \right\},$$

valamint a $\phi : S \to \mathcal{R}$ függvényt a

$$\phi(s) = \max_{t \in \Phi(s)} f(s,t)$$

szabállyal. Ekkor a μ pont–halmaz leképezés felülről félig folytonos, a ϕ függvény folytonos.

Bizonyítás.Tekintsünk egy az $s^\circ \in S$ ponthoz konvergáló $s^q \in S$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatot, valamint egy, a $t^\circ \in T$ ponthoz konvergáló $t^q \in T$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatot, amelyekre $\forall q$-ra $t^q \in \mu(s^q)$. Miután $\forall q$-ra $t^q \in \Phi(s^q)$ és Φ *f.f.f.*, ezért $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$. A másik oldalról vegyünk egy tetszőleges, $v \in \Phi(s^\circ)$ pontot. Miután Φ *a.f.f.*, ezért létezik olyan a v ponthoz tartó $v^q \in T$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozat amire $\forall q$-ra $v^q \in \Phi(s^q)$. Így minden q-ra

$$f(s^q, t^q) \geqq f(s^q, v^q).$$

Határértéket véve:

$$f(s^\circ, t^\circ) \geqq f(s^\circ, v).$$

Miután $v \in \Phi(s^\circ)$ tetszőleges volt, ezért ebből az egyenlőtlenségből a μ pont–halmaz leképezés *f.f.f.* volta következik, hiszen nyilván $t^\circ \in \mu(s^\circ)$.

A ϕ függvény folytonosságához azt kell belátnunk, hogy ϕ egyszerre *l.f.f.* és $f_P.f.f.$.

(i) Tegyük fel, hogy $s^\circ \in S$ és $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$, amelyekre

$$f(s^\circ, t^\circ) \geqq \phi(s^\circ) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Ilyen pontok az f függvény folytonossága miatt nyilván léteznek.) Ugyancsak az f függvény folytonossága miatt létezik az s°, illetve a t° pontnak rendre olyan $\mathcal{U}(s^\circ)$, illetve $\mathcal{V}(t^\circ)$ környezete, hogy az

$$(s,t) \in \mathcal{U}(s^\circ) \times \mathcal{V}(t^\circ)$$

tartalmazásból az

$$f(s,t) \geqq f(s^\circ, t^\circ) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \phi(s^\circ) - \varepsilon \tag{4F.2–1}$$

egyenlőtlenségláncolat következik. De miután $s^\circ \in S$, és Φ folytonos (itt elég az *a.f.f.-ság*), ezért minden, az s° ponthoz konvergáló $s^q \in \mathcal{U}(s^\circ)$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozathoz létezik olyan, a t° ponthoz konvergáló $t^q \in \mathcal{V}(t^\circ)$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozat, amire $t^q \in \Phi(s^q)$. Ezek értelmében, a (4F.2–1) egyenlőtlenséggel kapjuk a

$$\phi(s^q) \geqq f(s^q, t^q) \geqq f(s^\circ, t^\circ) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \phi(s^\circ) - \varepsilon$$

relációt, hiszen az f függvény folytonos, azaz a ϕ fügvény *l.f.f.*.

(ii) Tegyük fel, $s^\circ \in S$, ekkor minden $t \in \Phi(s^\circ)$ ponthoz létezik olyan $\mathcal{U}_t(s^\circ)$ és $\mathcal{V}(t)$ környezet, hogy az $(s,v) \in \mathcal{U}_t(s^\circ) \times \mathcal{V}(t)$ tartalmazásból, az f függvény folytonossága miatt

$$f(s,v) \leqq f(s^\circ, t) + \varepsilon.$$

A Φ pont–halmaz leképezés *f.f.f.*, ezért $\Phi(s^\circ)$ zárt és – T korlátos lévén – kompakt. Emiatt t pontjainak $\mathcal{V}(t)$ környezeteiből kiválasztható véges sok olyan $\mathcal{V}(t_1), \mathcal{V}(t_2), \ldots, \mathcal{V}(t_K)$ környezet, ami lefedi. Legyen

$$\mathcal{U}'(s^\circ) = \bigcap_{k=1}^{K} \mathcal{U}_{t_k}(s^\circ) \quad \textit{és} \quad \mathcal{V}(\Phi(s^\circ)) = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{V}(t_k)$$

Ekkor tetszőleges $(s,t) \in \mathcal{U}'(s^\circ) \times \mathcal{V}(\Phi(s^\circ))$ párra

$$f(s,t) \leqq \max_k f(s^\circ, t_k) + \varepsilon \leqq \phi(s^\circ) + \varepsilon,$$

hiszen az f függvény folytonos. A Φ pont–halmaz leképezés *f.f.f.*, így létezik egy olyan $\mathcal{U}''(s^\circ)$ környezet, amelynek minden s pontjára $\Phi(s) \subset \mathcal{V}(\Phi(s^\circ))$.[15] Ebből az

$$\mathcal{U}(s^\circ) = \mathcal{U}'(s^\circ) \cap \mathcal{U}''(s^\circ)$$

egyenlőséggel definiált környezetre az $s \in \mathcal{U}(s^\circ)$ tartalmazásból következik, hogy

$$\phi(s) = \max_{t \in \Phi(s)} f(s,t) \leqq \phi(s^\circ) + \varepsilon,$$

azaz a ϕ függvény $f_p.f.f.$. □

[15] Ez indirekt módon könnyen belátható.